РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ | *ТОМ 62, ВЫПУСК 4*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД | *25 АВГУСТА, 1995*

Журнал поддерживается в 1995 году Российским фондом фундаментальных исследований по проекту № 95-02-91030.

Письма в ЖЭТФ, том 62, вып.4, стр.265 - 269 © 1995г. 25 августа

О СПОНТАННОМ НАРУШЕНИИ КИРАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В (2+1) ИЗМЕРЕНИИ

А.С.Вшивцев, К.Г.Клименко, Б.В.Магницкий*

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
117454 Москва, Россия

**Институт физики высоких энергий РАН*
142284 Протвино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 5 июля 1995 г.

Исследована фазовая структура трехмерной модели Гросса–Невье во внешнем магнитном поле H при наличии химического потенциала μ. В плоскости (μ, H) построена критическая кривая $\mu_c(H)$, которая разделяет безмассовую симметричную и массивную со спонтанным нарушением киральной инвариантности фазы теории друг от друга. Найдено поведение критической кривой при $H \to \infty$ и $H \to 0$.

Недавно было показано [1], что внешнее магнитное поле H является катализатором спонтанного нарушения киральной (флейворной) симметрии в (2+1)-мерных квантовых теориях поля. Авторы работы [1] показали, что при $H \neq 0$ конденсат спинорных полей отличен от нуля в безмассовой квантовой электродинамике (КЭД$_3$), а также в трехмерной модели с четырехфермионным взаимодействием. В последующих работах [2, 3] эффект исследовался более детально, в частности, было доказано [3], что в рамках КЭД$_3$ образование конденсата $<\bar{\psi}\psi>$ нестабильно относительно температуры T и химического потенциала μ, то есть при $T \neq 0$ и $\mu \neq 0$ конденсат спинорных полей равен нулю.

В связи с обнаружением "нового" эффекта мы хотим прежде всего заявить, что еще в работах [4] трехмерная модель Гросса–Невье (ГН) рассматривалась при $H \neq 0$ и $T \neq 0$. Там было показано, что внешнее магнитное поле является фактором, вызывающим спонтанное нарушение киральной симметрии. Кроме того, была найдена критическая температура $T_c(H)$ (в отличие от КЭД$_3$ она не равна нулю), ниже которой массы фермионов отличны от нуля (то есть $<\bar{\psi}\psi>\neq 0$, и симметрия спонтанно нарушена), а при $T>T_c(H)$ система переходит в безмассовую фазу с помощью фазового перехода второго рода.

В предлагаемой работе исследуется совместное влияние внешнего магнитного поля и химического потенциала на фазовую структуру трехмерной модели ГН. Лагранжиан модели имеет вид

$$L=\bar{\psi}_k i\hat{\partial}\psi_k+\frac{G}{2N}(\bar{\psi}_k\psi_k)^2, \tag{1}$$

где подразумевается суммирование по k от единицы до N, и для каждого фиксированного k ψ_k – четырехкомпонентный спинор Дирака. В этом формализме

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & -\sigma_3\end{pmatrix},\quad \gamma^1=\begin{pmatrix}i\sigma_1 & 0\\ 0 & -i\sigma_1\end{pmatrix},\quad \gamma^2=\begin{pmatrix}i\sigma_2 & 0\\ 0 & -i\sigma_2\end{pmatrix},$$

а лагранжиан (1) инвариантен относительно дискретного кирального преобразования

$$\psi_k\to\gamma^5\psi_k,\qquad \gamma^5=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где σ_i – матрица Паули, I – единичная 2×2 матрица. Мы думаем, что результаты статьи могут быть полезны при объяснении различных планарных эффектов, включая квантовый эффект Холла и высокотемпературную сверхпроводимость, для описания которых необходимо привлекать внешнее магнитное поле H и химический потенциал μ.

Рассмотрим сначала случай H, $\mu=0$. Введя вспомогательное скалярное поле $\sigma\sim\bar{\psi}_k\psi_k$, можно написать эффективный потенциал модели (1) в главном порядке $1/N$ разложения [4,5]:

$$\frac{1}{N}V_0(\sigma)=\frac{\sigma^2}{2G}-2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln(p^2+\sigma^2). \tag{3}$$

Интегрирование в (3) осуществляется по области $0\leq p^2\leq\Lambda^2$ в евклидовом импульсном пространстве. Процедура устранения ультарфиолетовых расходимостей из выражений типа (3) описана в [5], поэтому сразу представим перенормированный эффективный потенциал

$$\frac{1}{N}V_0(\sigma)=\frac{\sigma^2}{2f}+\frac{|\sigma|^3}{3\pi}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{f}\equiv\frac{1}{G}-\frac{2\Lambda}{\pi^2}=\frac{1}{G(m)}-\frac{2m}{\pi}. \tag{5}$$

где $G(m)$ – перенормированная константа связи, m – точка нормировки,

Из (5) следует, что константа f не зависит ни от точки нормировки m, ни от параметра Λ, то есть выражение (4) конечно и ренорминвариантно. Из (4) следует, что при $f>0$ абсолютный минимум потенциала лежит в точке $\sigma=0$, поэтому киральная инвариантность теории не нарушена. При $f<0$

точка глобального минимума потенциала есть $\sigma_0 = -\pi/f$. В этом случае у фермионов спонтанным образом возникает масса $M \equiv \sigma_0$, а симметрия модели относительно преобразования (2) спонтанно нарушена. (Если использовать в качестве независимого параметра константу $g \equiv \Lambda G$ [1], то при $g < g_c = \pi^2/2$ находится безмассовая симметричная фаза теории. В этом случае, как следует из (5), $f > 0$. Пусть $g > g_c$ (то есть $f < 0$), тогда в системе реализуется массивная фаза со спонтанным нарушением киральной инвариантности.)

Рассмотрим теперь случай $H, \mu \neq 0$. Опуская довольно громоздкие вычисления, приведем сразу выражение для эффективного потенциала:

$$V_{H\mu}(\sigma) = V_H(\sigma) - \frac{NeH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Theta(\mu - \epsilon_n)(\mu - \epsilon_n). \tag{6}$$

(Формула (6) выводится аналогично тому, как было получено эффективное действие в КЭД$_3$ в однопетлевом приближении при $H, \mu, T \neq 0$ [6]). Здесь $\alpha_n = 2 - \delta_{n0}$, $\Theta(x)$ – функция Хэвисайда, $\epsilon_n = (\sigma^2 + 2eHn)^{1/2}$, e – электрический заряд, а $V_H(\sigma)$ – эффективный потенциал при $H \neq 0$, $\mu = 0$ [4, 7]:

$$\frac{1}{N} V_H(\sigma) = \frac{1}{N} V_0(\sigma) + \frac{eH}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} e^{-x\sigma^2} \left[\mathrm{cth}(eHx) - \frac{1}{eHx} \right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2f} + \frac{eH|\sigma|}{2\pi} - \frac{(2eH)^{3/2}}{2\pi} \zeta \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH} \right), \tag{7}$$

где $\zeta(s, v)$ – обобщенная дзета-функция Римана [8]. Точка глобального минимума функции (7) $\sigma_0(H)$ имеет следующие свойства [4]. При $H \to 0$

$$\sigma_0(H) = \begin{cases} feH/2\pi + ..., & f > 0 \\ M[1 + (eH)^2/12M^4 + ...], & f < 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Здесь M – масса фермионов при $H = 0$. При $H \to \infty$, независимо от знака константы f,

$$\sigma_0(H) \simeq \sqrt{0,2eH}. \tag{9}$$

Исследуем поведение точки глобального минимума потенциала $V_{H\mu}(\sigma)$ в зависимости от μ и H. Уравнение стационарности функции (6) на интервале $\sigma \geq 0$ имеет вид

$$0 = \frac{\sigma}{f} + \frac{eH}{2\pi} - \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \zeta \left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eH} \right) + \frac{eH}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Theta(\mu - \epsilon_n) \frac{\sigma}{\epsilon_n}. \tag{10}$$

Разобьем плоскость параметров (μ, H) при $\mu, H \geq 0$ на области Ω_n:

$$(\mu, H) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n; \quad \Omega_n = \{(\mu, H) : 2eHn \leq \mu^2 \leq 2eH(n+1)\}. \tag{11}$$

Очевидно, что в области Ω_0 отлично от нуля только первое слагаемое под знаком суммы, стоящей в (10), в Ω_1 – первое и второе и т.д. В дальнейшем нам понадобится очень важное разложение ζ-функции [8]:

$$\zeta \left(\frac{1}{2}, \vartheta \right) = \sum_{i=0}^{k} (\vartheta + i)^{-1/2} - 2\sqrt{k + \vartheta} - \sum_{i=k}^{\infty} f_i(\vartheta), \tag{12}$$

где

$$f_k(\vartheta) = \frac{1}{2} \int\limits_k^{k+1} \frac{(u-k)du}{(u+\vartheta)^{3/2}} > 0. \tag{13}$$

Предположим, что $f > 0$. Проведем в плоскости (μ, H) кривую $\mu = \sigma_0(H)$, где $\sigma_0(H)$ – точка глобального минимума потенциала (7). Из (8), (9) видно, что при достаточно малых и больших значениях поля H кривая $\mu = \sigma_0(H)$ проходит через область Ω_0. Пусть $(\mu, H) \in \Omega_0$, где уравнение стационарности (10) имеет вид (здесь мы воспользовались разложением (12) при $k = 0$)

$$\frac{\sigma}{f} + \frac{\sigma^2}{\pi} + \frac{\sigma\sqrt{2eH}}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} f_i\left(\frac{\sigma^2}{2eH}\right) - \frac{eH}{2\pi}[1 - \Theta(\mu - \sigma)] = 0. \tag{14}$$

Ясно, что при $\mu > \sigma_0(H)$ (14) имеет только одно решение: $\sigma_1 = 0$. Если $\mu < \sigma_0(H)$, то у (14) дополнительно к σ_1 появится еще одно решение: $\sigma_2 = \sigma_0(H)$. Аналогичные выкладки можно провести для любой области Ω_n. Следовательно, при $f > 0$ точкам плоскости (μ, H), лежащим выше кривой $\mu = \sigma_0(H)$, соответствует эффективный потенциал (6), который имеет глобальный минимум при $\sigma_1 = 0$. Таким образом при $\mu > \sigma_0(H)$ располагается безмассовая кирально инвариантная фаза теории. Если $\mu < \sigma_0(H)$, то уравнение (10) будет иметь два решения: $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = \sigma_0(H)$. Поэтому уравнение

$$V_{H\mu}(0) = V_{H\mu}(\sigma_0(H)) \tag{15}$$

определяет критическую кривую $\mu = \mu_c(H)$, которая в плоскости (μ, H) отделяет безмассовую фазу (при $\mu > \mu_c(H)$) от массивной (при $\mu < \mu_c(H)$), в которой киральная симметрия теории спонтанно нарушена. При пересечении критической кривой происходит фазовый переход первого рода, так как в этом случае масса фермионов скачком меняется от нуля до $\sigma_0(H)$. Очевидно, что $\mu_c(H) \leq \sigma_0(H)$, поэтому при достаточно малых и больших значениях H критическая кривая лежит в области Ω_0, где уравнение (15) имеет вид

$$\mu_c(H) = \frac{2\pi}{eH}[V_H(0) - V_H(\sigma_0(H))]. \tag{16}$$

При малых значениях H из (8) и (16) следует

$$\mu_c(H) \cong \frac{2\pi}{eH} \frac{dV_H(0)}{d\sigma} \sigma_0(H) = \sigma_0(H). \tag{17}$$

При $H \to \infty$ из (9) и (16) имеем

$$\mu_c(H) \sim \sqrt{eH}. \tag{18}$$

Если $f < 0$, то анализ потенциала (6) значительно усложняется. Дело в том, что в этом случае уравнение стационарности (10), кроме $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = \sigma_0(H)$, может иметь и другие решения. В силу этого строгие результаты мы можем получить только при достаточно больших значениях магнитного поля. Опуская подробные расчеты, укажем, что при $(M = -\pi/f)$

$$2M^2 < eH \tag{19}$$

потенциал $V_{H\mu}(\sigma)$, как и в случае $f > 0$, может иметь не более двух стационарных точек $\sigma_{1,2} = 0, \sigma_0(H)$. Поэтому в области (19) плоскости (μ, H) критическая кривая $\mu_c(H)$ определяется уравнением (15). При достаточно больших H, когда $\mu_c(H)$ попадает в область Ω_0, критическая кривая имеет вид (16), а при $H \to \infty$ величина $\mu_c(H)$ ведет себя как $\sqrt{eH}$.

Таким образом, в предлагаемой работе показано, что в трехмерной модели Гросса–Невье киральная инвариантность, спонтанно нарушенная внешним магнитным полем, обязательно восстанавливается при некотором значении химического потенциала $\mu_c(H) \neq 0$. При $H \to \infty$ критическая кривая $\mu_c(H) \sim \sqrt{eH}$, а при малых значениях H и $f > 0$ $\mu_c(H)$ совпадает с динамической массой фермиона $\sigma_0(H)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 95-02-03704-а.

---

1. V.P.Gusynin, V.A.Miransky, and I.A.Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **73**, 3499 (1994).
2. D.Cangemi, E.D'Hoker, and G.V.Dunne, Phys. Rev. **D51**, 2513 (1995); R.Parwani, Preprint IR/BBSR/95-12, hep-th/9504020.
3. A.Das and M.Hott, Preprint UR-1419, ER-40685-868, hep-th/9504086.
4. K.G.Klimenko, Z. Phys. **C54**, 323 (1992); К.Г.Клименко, ТМФ **89**, 211 (1991); ТМФ **90**, 3 (1992).
5. К.Г.Клименко, ТМФ **95**, 42 (1993).
6. А.С.Вшивцев, К.Г.Клименко, Б.В.Магницкий, ЖЭТФ **107**, 307 (1995).
7. И.В.Криве, С.А.Нафтулин, ЯФ **54**, 1471 (1991).
8. Е.Т.Уиттекер, Г.Н.Ватсон, *Курс современного анализа*, т.2, Ленинград-Москва, ГТТИ, 1934.