

ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ВЫХОД ИЗ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ КВАЗИАТТРАКТОРА

Д.Г.Лучинский¹⁾, И.А.Хованов*

⁺ Department of Physics, Lancaster University
Lancaster, LA1 4 YB, UK

* Саратовский государственный университет
410026, Саратов, Россия

Поступила в редакцию 1 апреля 1999 г.

После переработки 5 мая 1999 г.

Исследован индуцированный шумом выход за границы притяжения странного аттрактора (СА) в периодически возбуждаемом нелинейном осцилляторе. Методами численного моделирования показано, что выход происходит в два этапа: переход системы с СА на близлежащий седловой цикл по нескольким оптимальным траекториям и последующий флуктуационный выброс за границу области притяжения СА вдоль единственной оптимальной траектории. Обсуждается возможность использования результатов данной работы для решения проблемы оптимального контроля за переключениями из аттрактора и для построения теоретических оценок вероятности выхода.

PACS: 02.50.-r, 05.20.-y, 05.40.+j

Проблема устойчивости хаотических аттракторов в присутствии слабого шума является одной из фундаментальных нерешенных проблем теории флуктуаций (см., например, [1]), имеющей большое практическое значение [2, 3]. Сложность в решении этой проблемы связана, в частности, с тем, что динамика системы вблизи хаотического аттрактора в процессе индуцированных шумом больших отклонений от детерминированных хаотических траекторий остается неясной.

В настоящей работе предлагается использовать измерения *вероятности предистории флуктуаций* [4] для прямого экспериментального исследования динамики системы вблизи странного аттрактора непосредственно перед выходом за границы его притяжения.

В основе метода лежит представление об оптимальных траекториях, вдоль которых система флуктуирует к удаленным от равновесия состояниям [5]. Математическим вариантом этих физических представлений являются асимптотические формулы для решения уравнения Фоккера – Планка, записываемые в терминах лучей или волновых фронтов [6]. По существу, метод сводится к непрерывному слежению за динамикой системы и построению распределения всех реализаций флуктуационных траекторий системы, переводящих ее из состояния равновесия в заданное удаленное состояние [4]. Преимущества этого подхода были продемонстрированы ранее [7–9] на примере исследования некоторых фундаментальных свойств симметрии оптимальных траекторий и сингулярных особенностей в их распределении.

Для исследований была выбрана модель нелинейного осциллятора в присутствии шума и внешней периодической силы:

$$\dot{q} = K(q, t) + f(t), \quad K = \{K_1, K_2\} = \{q_2, -2\Gamma q_2 - \omega_0^2 q_1 - \beta q_1^2 - \gamma q_1^3 + h \cos(\omega_f t)\},$$

¹⁾ e-mail: d.luchinsky@lancaster.ac.uk

$$f(t) = \{0, \xi(t)\}, \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(0) \rangle = 4\Gamma kT\delta(t), \quad (1)$$

$$\Gamma \ll \omega_f, \quad 9/10 < \beta^2/\gamma\omega_0^2 < 4.$$

При выбранных значениях параметров потенциал одноямы ($\beta^2 < 4\gamma\omega_0^2$), а зависимость частоты колебаний от энергии является немонотонной ($\beta^2/\gamma\omega_0^2 > 9/10$). Эта модель встречается во многих приложениях и позволяет проводить теоретический анализ в большом диапазоне параметров (см., например, [10, 11]). Ранее было показано [10], что хаос в системе (1) может возникать при сравнительно малых амплитудах $h \approx 0.1$ внешней силы.

Упрощенная диаграмма (рис.1) показывает границы устойчивости предельных циклов периодов 1 и 2, а также областей существования динамического хаоса. Хаотический аттрактор возникает в результате каскада бифуркаций удвоения периода и поэтому является квазиаттрактором [12]. Отметим, что качественно эта диаграмма воспроизводит особенности, предсказанные ранее теоретически для близких параметров [10].

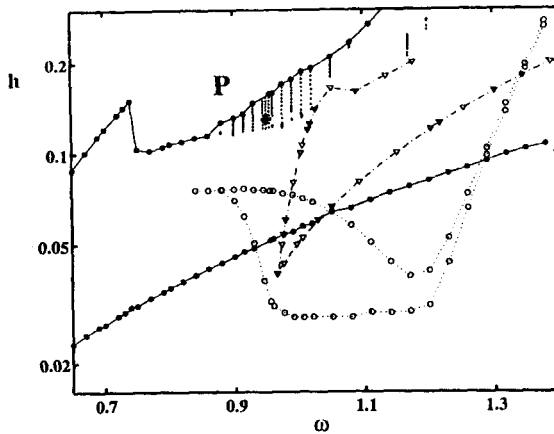


Рис.1. Фазовая диаграмма системы (1) на плоскости параметров внешней силы, полученная численным моделированием (1) с $\Gamma = 0.05, \omega_0 = 0.597, \beta = 1, \gamma = 1$. Области хаоса показаны мелкими крестами. Область сосуществования двух аттракторов, соответствующих резонансам периода 1 системы (1) показана черными точками. Круги ограничивают область гистерезиса рождения и уничтожения аттрактора, соответствующего резонансу периода 2. Область сосуществования двух аттракторов, соответствующих резонансу периода 2, показана треугольниками (сплошные, штрих-пунктирная и пунктирная линии, соединяющие символы, приведены для облегчения чтения рисунка). Рабочая точка P с $\omega_f = 0.95, h = 0.13$, показанная жирным крестом, выбрана в области сосуществования странного аттрактора и устойчивого предельного цикла, соответствующего резонансу периода 1

Точкой P на диаграмме обозначен выбранный для исследований режим, в котором СА сосуществует с устойчивым предельным циклом. Этот режим часто встречается в приложениях, имеющих практический интерес [2, 13, 14]. Для детального изучения поведения системы (1) в этом режиме были проведены численные исследования ее динамики с использованием высокоскоростного генератора псевдослучайных последовательностей [15].

Области притяжения обоих аттракторов показаны на рис.2а для одного из сечений Пуанкаре. Символами S_i и U на рисунке обозначены устойчивый и неустойчивый предельные циклы, соответственно. СА показан на рисунке точками (максимальная

ляпуновская экспонента равна $\lambda_M = 0.0449$). В присутствии слабого шума появляется конечная вероятность индуцированных шумом переходов между хаотическим аттрактором и устойчивым предельным циклом. Пересечения одной из реальных траекторий выхода с данным сечением Пуанкаре показаны на рисунке жирными точками. Седловой цикл периода 3 (S_3), через который проходит оптимальная траектория выхода (см. ниже), показан на рисунке крестами. Мультипликаторы для S_3 имеют значения $\mu_1 = 0.04873 < 1$ и $\mu_2 = 7.608312 > 1$.

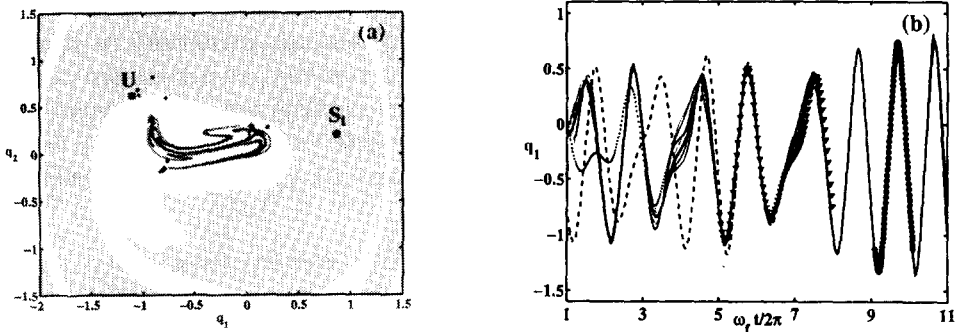


Рис.2. (а) Заштрихованная и белая области соответствуют областям притяжения устойчивого предельного цикла S_4 и CA в сечении Пуанкаре системы (1) для $\omega_f t = 0.6\pi$ с параметрами, соответствующими точке P на предыдущем рисунке. Жирными точками показаны пересечения с данной плоскостью одной из реальных траекторий выхода системы за границы притяжения CA . Точкой U показан неустойчивый предельный цикл, лежащий на границе области притяжения CA . Кресты соответствуют точкам, принадлежащим циклу S_3 . (б) Три оптимальные траектории выхода, показанные штриховой, сплошной и пунктирной линиями имеют относительные вероятности 9.5:4:1 соответственно. Один период неустойчивого седлового цикла периода 3 (S_3) и неустойчивого предельного цикла U показаны треугольниками и жирными точками соответственно. 15 реальных траекторий выхода, отвечающих одной и той же оптимальной траектории, показаны сплошными тонкими линиями

В рамках гамильтонового формализма можно ожидать следующий простейший сценарий выхода. Рассмотрим сначала выход системы из области притяжения устойчивого предельного цикла, ограниченной неустойчивым предельным циклом. В общем случае выход происходит вдоль единственной оптимальной траектории $q_{opt}(t)$, связывающей оба предельных цикла. Для определения $q_{opt}(t)$ и вероятности выхода P в пределе $T \rightarrow 0$ можно искать решение соответствующего (1) уравнения Фоккера – Планка в виде, аналогичном ВКБ приближению [6] (см. также [4–9, 17, 18]):

$$P(\mathbf{q}, t) \approx C \exp(-S(\mathbf{q}, t)/kT), \quad T \rightarrow 0, \quad (2)$$

где C – префактор, а $S(\mathbf{q}, t)$ играет роль "активационной энергии" флуктуаций в точку \mathbf{q} в пространстве состояний системы и для периодически возмущаемых систем периодически зависит от времени. При подстановке (2) в уравнения Фоккера – Планка и разложении по степеням T видно, что в главном порядке разложения $S(\mathbf{q}, t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби с так называемым гамильтонианом H Вентцеля-Фрейдлина [6]:

$$\dot{S} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) = 0, \quad H = \frac{1}{2}p_2^2 + p_1 K_1 + p_2 K_2, \quad \mathbf{p} = \{p_1, p_2\} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3)$$

Траектория $q_{opt}(t)$ определяется путем минимизации S на множестве всех классических детерминированных траекторий, определяемых гамильтонианом H , начинающихся на устойчивом предельном цикле при $t \rightarrow -\infty$ и заканчивающихся на неустойчивом предельном цикле при $t \rightarrow \infty$. То есть $q_{opt}(t)$ является гетероклинической траекторией системы (3) минимального действия $S_a = \min S$, где минимум понимается в указанном смысле, а вероятность выхода принимает вид $P \approx \exp(-S_a/kT)$. Отметим, что существование оптимальных траекторий выхода, а также справедливость уравнений (2), (3) были подтверждены экспериментально ранее для ряда нехаотических систем (см. [7–9] и ссылки в них).

Если интенсивность шума мала, то вероятность выхода вдоль оптимальной траектории $P(q_{opt}, t)$ экспоненциально мала, но она экспоненциально превосходит вероятности выхода вдоль любой другой траектории, в том числе вдоль других гетероклинических траекторий системы (3).

Поскольку область притяжения СА ограничена неустойчивым предельным циклом U , то вблизи U ситуация качественно не изменяется и в этой области траектория выхода остается единственной. Однако вблизи хаотического аттрактора ситуация иная. Анализ гамильтонового потока дополнительной системы (3) в этой области практически невозможен, и в настоящее время не существует предсказаний о характере распределения оптимальных траекторий вблизи СА. Простейший сценарий заключается в том, что, подходя к границе хаотического аттрактора, оптимальная траектория размывается в "хвост кометы" и теряется, сливаясь с его границей.

Однако статистический анализ реальных флуктуационных траекторий выхода позволяет выявить более детальную картину индуцированного шумом выброса из хаотического аттрактора.

Было исследовано несколько тысяч реальных траекторий выхода системы (1) за границы области притяжения СА в различных режимах работы. Типичная ситуация представлена на рис.2b для параметров системы, соответствующих точке P рис.1. На рис.2b для примера приведены пятнадцать реальных траекторий выхода, соответствующих одной и той же оптимальной траектории. Все траектории совмещены во времени по единственной характерной точке, отвечающей прохождению через седловой цикл периода 3 (треугольники) при переходе от хаотического движения к регулярному. Видно, что все реальные траектории проходят в непосредственной близости от оптимальной в полосе с полушириной $\propto \sqrt{kT}$ (отметим, что пространство состояний (1) трехмерно и траектории формируют в нем узкую трубку с радиусом $\propto \sqrt{kT}$; на рисунке для простоты показана лишь проекция на плоскость $(\omega_f t, x)$). Таким образом, имеется возможность экспериментального определения оптимальных траекторий выхода путем простого усреднения.

Найденные экспериментально три оптимальные траектории выхода за границы области притяжения СА показаны на рис.2b сплошной, пунктирной и штриховой линиями. На этом же рисунке изображено по одному периоду, найденных численно, цикла $S3$ (треугольники), расположенного вблизи СА, и неустойчивого предельного цикла (жирными точками), ограничивающего область притяжения СА. Анализ оптимальных траекторий позволяет выявить следующие особенности флуктуационного выброса системы за границы области притяжения СА: (i) система покидает СА вдоль нескольких оптимальных траекторий; (ii) эти траектории сливаются в одну, подходя к расположенному вблизи СА седловому циклу $S3$; (iii) дальнейший переход

совершается вдоль единственной оптимальной траектории выхода, связывающей $S3$ и неустойчивый предельный цикл U , расположенный на границе области притяжения CA .

По-видимому, из всего множества неустойчивых седловых циклов цикл $S3$ является наиболее близким по переменной действия к границе области притяжения CA и в этом смысле может рассматриваться в качестве границы CA . Кроме того, проведенный анализ позволяет разделить выброс системы из области притяжения CA условно на два этапа: переход $CA \rightarrow S3$ по трем оптимальным траекториям и последующий флуктуационный выброс $S3 \rightarrow U$ вдоль единственной оптимальной траектории. Число оптимальных траекторий перехода $CA \rightarrow S3$ варьируется в зависимости от выбора рабочей точки. Экспериментально наблюдалось от одной до трех траекторий выхода для работы в различных режимах. При этом вероятности выхода вдоль разных траекторий различны (см., например, подпись к рис.2b).

Данный сценарий выхода открывает принципиальную возможность построения аналитических оценок вероятности $P(q)$ переключения системы с CA на устойчивый предельный цикл в дополнение к предложенным ранее методам численных оценок этой вероятности [1, 16]. В первом приближении $P(q)$ может быть оценена как вероятность выхода с $S3$. Поправки могут быть вычислены, принимая во внимание тот факт, что переход $CA \rightarrow S3$ происходит вдоль трех оптимальных траекторий (см. рис.2b). Представляется вероятным, что система переходит с CA на $S3$ через седловые циклы, встроенные в структуру CA . Из всего набора седловых циклов система выбирает лишь несколько, наиболее близких к $S3$ по переменной действия. Иерархия седловых циклов системы по переменной действия может быть определена экспериментально, если одновременно со статистической обработкой динамических траекторий системы проводить обработку соответствующих реализаций внешней случайной силы (см., например, [8]). Предварительный анализ показывает, что для выбранных параметров системы переход $CA \rightarrow S3$ осуществляется в основном с седлового цикла периода 5.

Отметим, что сама возможность аналитических оценок вероятностей переходов между предельными циклами связана с необходимостью обобщения недавно предложенной теории логарифмической восприимчивости [17, 18] на системы с предельными циклами [19]. Однако при этом возникает дополнительная проблема, связанная с определением формы предельных циклов.

Таким образом, результаты численных экспериментов показывают, что анализ флуктуационного выхода системы за границы притяжения квазиаттрактора (в случае нефрактальных границ) сводится к анализу вероятности переходов между несколькими седловыми циклами. Полученные результаты согласуются с известным выводом о том, что хаотическое поведение низкоразмерных динамических систем в значительной степени определяется положением и свойствами стабильности неустойчивых циклов, встроенных в хаотические структуры (см., например, [20–22]).

Дополнительный статистический анализ реализаций внешней случайной силы, соответствующих выбросу системы за границы притяжения CA , позволяет найти детерминированную оптимальную силу (в смысле минимального действия), переключающую систему из режима динамического хаоса в периодический режим работы. Таким образом, предлагаемый метод может быть использован в качестве нового экспериментального подхода к решению проблемы оптимального контроля за пере-

ключениями системы между хаотическим и устойчивыми режимами работы в присутствии шума. Эта возможность будет исследована экспериментально и численно в последующих публикациях.

Авторы выражают благодарность М.И.Дыкману и В.С.Смельянскому за стимулирующие обсуждения. Настоящая работа выполнена в рамках проектов, поддержанных INTAS (грант #96-0305 и грант #97-05-74), EPSRC (грант #GR/L99562) и Королевским обществом Лондона.

-
1. R.Graham, A.Hamm, and T.Tel, Phys. Rev. Lett. **66**, 3089 (1991).
 2. R.Kautz, Phys. Lett. **A125**, 315 (1987).
 3. R.L.Kautz, Rep. Prog. Phys. **59**, 935 (1996).
 4. M.I.Dykman et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 2718 (1992).
 5. L.Onsager and S.Machlup, Phys. Rev. **91**, 1505 (1953).
 6. M.I.Freidlin and A.D. Wentzel, *Random Perturbations in Dynamical Systems*, Springer, New-York, 1984; А.Д.Вентцель, М.И.Фрейдлин, УМН **25**, 3 (1970).
 7. D.G.Luchinsky et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 3117 (1997).
 8. D.G.Luchinsky, P.V.E.McClintock, and M.I.Dykman, Rep. Prog. Phys. **61**, 889 (1998).
 9. D.G.Luchinsky and P.V.E. McClintock, Nature **389**, 463 (1997).
 10. S.M.Soskin et al., in: *Noise in Physical systems and 1/f fluctuations, Proc. of the 14th Int. Conf.*, IMEC, Ed. C. Claeys and E.Simoen, World Scientific, Leuven, Belgium, 1997, p.351.
 11. R.Mannella, S.M.Soskin, and P.V.E. McClintock, Int. J. of Bifurc. and Chaos **8**, 701 (1998).
 12. V.S.Afraimovich, in: *Nonlinear and turbulent process in physics*, Gordon and Breach, New York, 1984, p.1133.
 13. H.M.Gibbs, F.A.Hopf, D.L.Kaplan, and R.L.Shoemaker, J. Opt. Soc. of America **71**, 367 (1981).
 14. J.A.Blackburn, H.J.T.Smith, and N.Gronbech-Jensen, Phys. Rev. **B53**, 14546 (1996).
 15. G.Marsaglia and W.-W.Tsang, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **5**, 349 (1984).
 16. P.Jung and P. Hänggi, Phys. Rev. Lett. **65**, 3365 (1990).
 17. M.I.Dykman, H.Rabitz, V.N.Smelyanskiy, and B.E. Vugmeister, Phys. Rev. Lett. **79**, 1178 (1997).
 18. V.N.Smelyanskiy, M.I.Dykman, H.Rabitz, and B.E.Vugmeister, Phys. Rev. Lett. **79**, 3113 (1997).
 19. M.I.Dykman and V.N.Smelyanskiy, private communication.
 20. D.Auerbach et al., Phys. Rev. Lett. **58**, 2387 (1987).
 21. C.Grebogi, E.Ott, and J.A.Yorke, Phys. Rev. **A37**, 1711 (1988).
 22. P.Schmelcher and F.K.Diakonos, Phys. Rev. Lett. **78**, 4733 (1997).