Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.5, стр.367 - 368 © 1996г. 10 марта

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ РАССЛОЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ФЕРМИОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА РЕШЕТКЕ

В.А.Гейлер, И.Ю.Попов[1)]

Институт точной механики и оптики

197101 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 21 декабря 1995 г.

Показано, что для произвольного решеточного гамильтониана фермионов в однородном магнитном поле число Чженя полного расслоения магнито-блоховских состояний этого гамильтониана равно нулю.

PACS: 02.40.Re, 73.40.Hm

Исследование ряда проблем физики конденсированных сред приводит к изучению решеточных моделей фермионов в магнитном поле (см., например, [1-5]). В континуальном случае спектральные свойства соответствующих гамильтонианов, как было замечено Новиковым, тесно связаны с топологическими свойствами расслоения магнито-блоховских функций [6]. Более того, топологическая интерпретация целочисленного квантового эффекта Холла показывает, что вклад в квантованную холловскую проводимость фиксированного уровня Ландау равен числу Чженя c_1 расслоения магнито-блоховских функций этого уровня [7]. В континуальном случае это число было найдено в [6] и оказалось равным единице. Вклад магнитных подзон расплывшегося уровня Ландау в холловскую проводимость (то есть число Чженя соответствующего подрасслоения) может быть произвольным, но сумма таких вкладов, очевидно, равна единице [7]. В случае гамильтонианов на решетке ситуация несколько иная. Для гамильтониана с перескоком на ближайшие узлы или с диагональным перескоком путем численных расчетов было показано, что сумма вкладов в квантованную холловскую проводимость от всех магнитных подзон равна нулю, хотя, разумеется вклад отдельных подзон отличен от нуля [2,3]. Мы хотим показать, что это обстоятельство является следствием некоторого общего топологического утверждения, не зависящего от выбора конкретного решеточного гамильтониана.

Пусть Λ – двумерная решетка с базисными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Будем считать, что поток η магнитного поля через плакет решетки (в единицах кванта потока $\Phi_0 = hc/e$) есть рациональное число: $\eta = p/q$, где p и q взаимно просты. В пространстве состояний на решетке Λ действует группа магнитных трансляций [8]; магнитная трансляция $[\vec{\mu}]$ на вектор $\vec{\mu}$ имеет вид

$$[\vec{\mu}]|\vec{\lambda}> = |\vec{\lambda} - \vec{\mu}> \exp[\pi i\eta(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)], \tag{1}$$

где λ_i, μ_i – координаты в базисе $\mathbf{a}_i$. Неприводимые представления $D_{\mathbf{k}}$ группы магнитных трансляций, на которые разлагается представление (1), имеют размерность q и параметризуются точками двумерного тора, разверткой которого удобно считать прямоугольник $[0, q^{-1}) \times [0, 1)$ (этот тор мы будем обозначать $\mathbf{T}^2_\eta$). При фиксированном $\mathbf{k}$ в пространстве делокализованных состояний (то

[1)] e-mail: popov@cts.ifmo.ru

есть в пространстве ограниченных функций на Λ, вообще говоря, не суммируемых с квадратом) существует ровно q подпространств размерности q, инвариантных относительно представления $D_{\mathbf{k}}$. Прямая сумма этих подпространств образует слой некоторого векторного расслоения E ранга q^2 над тором T^2_η [9]. Непосредственным вычислением можно убедиться, что в слое $E_{\mathbf{k}}$ над точкой $\mathbf{k}$ базис образуют следующие векторы $\psi_{nm}(\mathbf{k})$, где $n, m = 0, 1, ..., q-1$:

$$\psi_{nm}(\mathbf{k})(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + (q\lambda_2 + t)\mathbf{a}_2) =$$
$$= \delta_{mt} \exp[\pi i(\eta m + 2k_2 + 2\{\eta n\})\lambda_1 + (p\lambda_1 + 2k_2)\lambda_2]. \tag{2}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Фиксируя m, мы получаем векторное подрасслоение E_n расслоения E. Формула (2) показывает, что все E_n попарно изоморфны. Обозначая линейную комбинацию $a_0\psi_{00}(\mathbf{k}) + ... + a_{q-1}\psi_{q-1,0}(\mathbf{k})$ через $([a_0, ..., a_{q-1}]; k_1, k_2)$, получаем, что E_0 имеет следующие законы склейки:

$$([a_0, ..., a_{q-1}]; k_1 + 1/q, k_2) \simeq ([a_{\sigma(0)}, ..., a_{\sigma(q-1)}]; k_1, k_2);$$
$$([a_0, ..., a_{q-1}]; k_1, k_2 + 1) \simeq ([a_0, ..., a_{q-1}]; k_1, k_2), \tag{3}$$

где перестановка σ определяется соотношением $\sigma(j) = s$, если $\{\eta s\} = \{\eta j\} + 1/q$. Рассмотрим N-листное накрытие f: $\mathrm{T}^2 \to \mathrm{T}^2_\eta$ тора T^2_η, заданное формулой $f(k_1, k_2) = (\{qk_1\}/q, k_2)$. Из (2) и (3) легко получить, что индуцированное расслоение f^*E_0 имеет тривиальные законы склейки, поэтому $c_1(f^*E_0) = 0$. Поскольку $c_1(f^*E_0) = qc_1(E_0)$ [10], мы получаем, что $c_1(E_0) = 0$, поэтому и $c_1(E) = 0$.

Заметим, что расслоение магнито-блоховских функций, рассмотренное в [2,3], получается следующим образом. Вначале решетка Λ "укрупняется" до решетки Λ', получаемой из Λ заменой базисного вектора $\mathbf{a}_2$ на $q\mathbf{a}_2$. После этого исходное пространство состояний представляется в виде прямой суммы q пространств, построенных по решетке Λ'. Поскольку группа магнитных трансляций на векторы решетки Λ' коммутативна, все неприводимые представления ее являются характерами, параметризуемыми точками тора T^2. Теперь рассматривается расслоение делокализованных состояний, на которые группа магнитных трансляций вдоль векторов решетки Λ' действует умножением на характеры. Как вытекает из вышеизложенного, это расслоение разлагается в прямую сумму q расслоений с нулевыми числами Чженя, следовательно, оно само имеет нулевое число Чженя.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований, Государственного комитета по высшей школе Российской федерации, фонда Сороса и АЕН Российской федерации, а также EC-Russia Collaboration Contract ESPRIT P9282 ACTCS.

1. А.А.Белов, Ю.Е.Лозовик, В.А.Мандельштам, Письма в ЖЭТФ **51**, 422 (1990).
2. M.Kohmoto, Phys. Rev. **B39**, 11943 (1989).
3. Y.Hatsugai and M.Kohmoto, Phys. Rev. **B42**, 8282 (1990).
4. A.Barelli and R.Fleckinger, Phys. Rev. **B46**, 11559 (1992).
5. Y.Hatsugai, M.Kohmoto, and Y.-S.Wu, Phys. Rev. Lett. **73**, 1134 (1994).
6. С.П.Новиков, Докл. АН СССР **257**, 538 (1981).
7. D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
8. J.Zak, Phys. Rev. **B134**, A1602 (1964).
9. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Е.Фоменко, *Современная геометрия*, М.: Наука, 1986.
10. Р.Ботт, Л.В.Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, М.: Наука, 1989.