Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.5, стр.369 - 374 © 1996г. 10 марта

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ИЗИНГА: ДУАЛЬНОСТЬ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

А.И.Бугрий[1]*, В.Н.Шадура*

Институт теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова НАН Украины

252143 Киев, Украина

Поступила в редакцию 5 февраля 1996 г.

Получены соотношения дуальности между моделью Изинга на квадратной решетке, намотанной на цилиндр с дефектом и свободными граничными условиями на его основаниях, и моделью Изинга с магнитными полями, приложенными к основаниям цилиндра. В качестве следствий из этих соотношений мы выводим соотношения дуальности для моделей Изинга со свободными, смешанными и фиксированными граничными условиями на основаниях цилиндра.

PACS: 05.50.+q

Преобразование дуальности для двумерной модели Изинга было открыто в 1941 г. Крамерсом и Ванье [1]. Им удалось установить соответствие между статистической суммой модели в низкотемпературной фазе и статистической суммой на дуальной решетке в высокотемпературной фазе

$$(\sinh 2\widetilde{K})^{-N/2}\widetilde{Z}(\widetilde{K}) = (\sinh 2K)^{-N/2}Z(K),$$

$$\sinh 2K \cdot \sinh 2\widetilde{K} = 1. \tag{1}$$

Такое свойство самодуальности позволило, в частности, определить критическую температуру еще до получения точного решения модели Онсагером [2].

В работе [3] соотношение дуальности (1) было обобщено для неоднородной модели Изинга, в которой параметры взаимодействия являются произвольными функциями координат узлов решетки:

$$\prod_{\widetilde{r},i}\left(\sinh 2\widetilde{K}_i(\widetilde{r})\right)^{-1/4}\widetilde{Z}[\widetilde{K}_i(\widetilde{r})] = \prod_{r,i}\left(\sinh 2K_i(r)\right)^{-1/4}Z[K_i(r)], \tag{2}$$

$$\sinh 2K_1(r)\cdot\sinh 2\widetilde{K}_2(\widetilde{r}) = 1, \quad \sinh 2K_2(r)\cdot\sinh 2\widetilde{K}_1(\widetilde{r}) = 1. \tag{3}$$

Как отмечалось еще авторами [1,3], соотношения (1) и (2) нельзя понимать буквально. Эти соотношения становятся точными в термодинамическом пределе, то есть для удельной свободной энергии. Так, например, при выводе (1) методом сравнения высокотемпературного и низкотемпературного разложений трудно учесть и сравнить между собой графы, включающие спины на границах (в частности, те, что содержат циклы, охватывающие тор в случае периодических граничных условий).

[1] e-mail: abugrij@gluk.apc.org

В работе [4] было предложено точное соотношение дуальности для неоднородной двумерной модели Изинга на квадратной решетке конечного размера $N = n \times m$, намотанной на тор

$$\prod_{\widetilde{r},i}\left(\cosh 2\widetilde{K}_i(\widetilde{r})\right)^{-1/2}\widetilde{\mathrm{Z}}[\widetilde{K}] = \prod_{r,i}\left(\cosh 2K_i(r)\right)^{-1/2}\widehat{T}\mathrm{Z}[K]. \qquad (4)$$

Здесь компонентами вектора

$$\mathrm{Z}[K] = \left(Z^{(p,p)}, Z^{(p,a)}, Z^{(a,p)}, Z^{(a,a)}\right) \qquad (5)$$

являются статистические суммы $Z^{(\alpha,\beta)}[K]$ $(\alpha,\beta = a,p)$ модели Изинга с соответствующими комбинациями периодических (p) и антипериодических (a) граничных условий вдоль осей X и Y:

$$\widehat{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{T}^2 = 1,$$

и статистическая сумма имеет вид

$$2^N Z^{(\alpha,\beta)}[K] = \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H^{(\alpha,\beta)}[\sigma]},$$

$$-\beta H^{(\alpha,\beta)}[\sigma] = \sum_r \left(K_1(r)\sigma(r)\sigma(r+\widehat{x}) + K_2(r)\sigma(r)\sigma(r+\widehat{y})\right), \qquad (6)$$

где изинговский спин принимает два значения $\sigma(r) = \pm 1$; координаты узлов решетки $r = (x,y)$ пробегают значения $x = 1,\dots,n$, $y = 1,\dots,m$; константы взаимодействия по горизонтальным и вертикальным связям $K_1(r)$ и $K_2(r)$ являются в общем случае произвольными функциями координат. Для периодических по x и y граничных условий имеем $\sigma(n+1,y) = \sigma(1,y)$, $\sigma(x,m+1) = \sigma(x,1)$, а для антипериодических – $\sigma(n+1,y) = -\sigma(1,y)$, $\sigma(x,m+1) = -\sigma(x,1)$. В (1)-(4) тильдой обозначены величины, относящиеся к дуальной решетке. Координаты узлов дуальной решетки совпадают с координатами центров плакетов исходной решетки и наоборот: $\widetilde{r} = r + (\widehat{x}+\widehat{y})/2$, где $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ – единичные орты вдоль осей X и Y.

В работе [4] соотношение дуальности (5) было строго доказано в однородном случае и в первом порядке по теории возмущений в слабо неоднородном случае, а также проверено с помощью прямых вычислений на компьютере для размеров $m, n = 2, 3, 4$.

Используя (5), в данной работе мы выводим соотношения дуальности между моделями Изинга на квадратной решетке, намотанной на цилиндр с дефектом и свободными граничными условиями на его основаниях, и с магнитными полями, приложенными к основаниям цилиндра. В качестве следствий из этих соотношений мы получаем соотношения дуальности для моделей Изинга со свободными, смешанными и фиксированными граничными условиями на основаниях цилиндра. Статистические суммы с этими граничными условиями удобно получать, рассматривая модель Изинга с внешними магнитными полями H_1 и H_2, приложенными к основаниям цилиндра. Статистическая сумма такой модели с. произвольными магнитными полями на границах была вычислена в [5]. В свою очередь, статистическую сумму этой модели можно получить из статистической суммы модели Изинга на торе с дефектом, для которой гамильтониан совпадает с (6) при следующем выборе распределения констант взаимодействия: $K_1(r) = K_2(r) = K$ на всех связях решетки, за исключением следующих: $K_1(n-1, y) = h_1$, $K_1(n, y) = h_2$, $K_2(n, y) = h$, где $h_1 = \beta H_1$, $h_2 = \beta H_2$, $h = \beta H$, $y = 1, \ldots, m$. Соответственно, такая модель на дуальной решетке имеет гамильтониан

$$-\beta \widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}[\widetilde{\sigma}] = \sum_{r} \left(\widetilde{K}_1(\widetilde{r}) \widetilde{\sigma}(\widetilde{r}) \widetilde{\sigma}(\widetilde{r} - \widehat{x}) + \widetilde{K}_2(\widetilde{r}) \widetilde{\sigma}(\widetilde{r}) \widetilde{\sigma}(\widetilde{r} - \widehat{y}) \right),$$

в котором константы взаимодействия $\widetilde{K}_1(\widetilde{r}) = \widetilde{K}_2(\widetilde{r}) = \widetilde{K}$ на всех связях, за исключением следующих: $\widetilde{K}_2(n-1, \widetilde{y}) = \widetilde{h}_1$, $\widetilde{K}_2(n, \widetilde{y}) = \widetilde{h}_2$, $\widetilde{K}_1(n, y) = \widetilde{h}$, где $\widetilde{h}_1 = \beta \widetilde{H}_1$, $\widetilde{h}_2 = \beta \widetilde{H}_2$, $\widetilde{h} = \beta \widetilde{H}$, $\widetilde{y} = 1, \ldots, m$ и дуальные константы взаимодействия $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$ связаны с H_1 и H_2 на исходной решетке соотношениями

$$\sinh 2h_1 \cdot \sinh 2\widetilde{h}_1 = 1, \quad \sinh 2h_2 \cdot \sinh 2\widetilde{h}_2 = 1. \tag{7}$$

Рассматривая предел $h \to \infty$ в статистической сумме (7) (для определенности ограничимся ферромагнитной моделью), получаем статистическую сумму модели Изинга с магнитными полями H_1 и H_2 на границах:

$$2Z^p(K, h_1, h_2) = \lim_{h \to \infty} (2 \cosh h)^{-m} Z^{(\alpha,p)}(K, h_1, h_2, h) =$$

$$= 2 \sum_{[\sigma]} \exp(K \sum_{r,i} \sigma(r)\sigma(r+i) + h_1 \sum_{y=1}^{m} \sigma(n-1, y) + h_2 \sum_{y=1}^{m} \sigma(1, y)), \tag{8}$$

где для того, чтобы просуммировать по спиновым переменным $\{\sigma(n, y)\}$, используется следующее равенство:

$$\lim_{h \to \infty} (2 \cosh h)^{-m} \prod_{y=1}^{m} \exp(h\sigma(n, y)\sigma(n, y+1)) = \prod_{y=1}^{m} \delta(\sigma(n, y), \sigma(n, y+1)). \tag{9}$$

Здесь в правой части записано произведение δ-функций Кронекера, которое из всего конфигурационного пространства для $\{\sigma(n, y)\}$ выделяет две спиновые конфигурации: все спины направлены вверх или вниз.

Заметим, что приведенные выше статистические суммы с магнитными полями на границах получены предельной процедурой с соответствующей нормировкой, устраняющей бесконечную константу. В других случаях вследствие конфликта произведения δ-функций Кронекера и граничных условий после взятия предела мы можем получить нуль, например,

$$\lim_{h \to \infty} (2 \cosh h)^{-m} Z^{(\alpha,a)}(K, h_1, h_2, h) = 0, \tag{10}$$

но это совсем не означает, что $Z^a(h_1,h_2)=0$. Соответственно для этих предельных случаев, используя (7), для дуальной решетки имеем $\widetilde{h}=0$ и

$$\widetilde{Z}^{\beta}(\widetilde{K},\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)=\lim_{\widetilde{h}\to 0}\widetilde{Z}^{(\alpha,\beta)}(\widetilde{K},\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2,\widetilde{h})=\sum_{[\widetilde{\sigma}]}\exp(\widetilde{K}\sum_{\widetilde{r},i}\widetilde{\sigma}(\widetilde{r})\widetilde{\sigma}(\widetilde{r}+i)+$$

$$+\widetilde{h}_1\sum_{\widetilde{y}=1}^{m}\widetilde{\sigma}(n,\widetilde{y})\widetilde{\sigma}(n,\widetilde{y}+1)+\widetilde{h}_2\sum_{\widetilde{y}=1}^{m}\widetilde{\sigma}(1,\widetilde{y})\widetilde{\sigma}(1,\widetilde{y}+1)),\quad \beta=a,p. \tag{11}$$

Теперь, взяв пределы $h\to\infty$ и $\widetilde{h}\to 0$ в (5) и используя (9)-(11), нетрудно получить соотношения дуальности для модели Изинга на квадратной решетке, намотанной на цилиндр с магнитными полями, приложенными к его основаниям:

$$\frac{\widetilde{Z}^p(\widetilde{K},\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)}{\left[\cosh^m 2\widetilde{h}_1\cosh^m 2\widetilde{h}_2(\cosh 2\widetilde{K})^{2m(n-3)}\right]^{1/2}}=\frac{Z^p(K,h_1,h_2)+Z^p(K,h_1,-h_2)}{\left[\cosh^m 2h_1\cosh^m 2h_2(\cosh 2K)^{2m(n-3)}\right]^{1/2}}, \tag{12}$$

$$\frac{\widetilde{Z}^a(\widetilde{K},\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)}{\left[\cosh^m 2\widetilde{h}_1\cosh^m 2\widetilde{h}_2(\cosh 2\widetilde{K})^{2m(n-3)}\right]^{1/2}}=\frac{Z^p(K,h_1,h_2)-Z^p(K,h_1,-h_2)}{\left[\cosh^m 2h_1\cosh^m 2h_2(\cosh 2K)^{2m(n-3)}\right]^{1/2}}. \tag{13}$$

Заметим, что после взятия соответствующих пределов мы получаем в левой части (12) и (13) решетку с размером $n\times m$, а в правой части – с размером $(n-1)\times m$.

Для того чтобы получить статистические суммы для модели Изинга на исходной решетке с различными граничными условиями на основаниях цилиндра, необходимо рассмотреть в (8) различные комбинации пределов $h_i\to\infty$ и $h_i\to 0$, $i=1,2$:

1) свободные граничные условия – $h_1=h_2=0$, для них введем обозначение

$$Z^{\alpha}_{(0,0)}=2^{-2m}Z^{\alpha}(K,0,0),\quad \alpha=a,p;$$

2) фиксированные граничные условия – $h_i\to\infty$:

$$Z^{\alpha}_{(+,+)}=\lim(2\cosh h_1 2\cosh h_2)^{-m}Z^{\alpha}(K,h_1,h_2),$$

$$Z^{\alpha}_{(+,-)}=\lim(2\cosh h_1 2\cosh h_2)^{-m}Z^{\alpha}(K,h_1,-h_2);$$

3) граничные условия смешанного типа – $h_1\to\infty$, $h_2=0$ или $h_2\to\infty$, $h_1=0$:

$$Z^{\alpha}_{(+,0)}=\lim(4\cosh h_1)^{-m}Z^{\alpha}(K,h_1,h_2)=\lim(4\cosh h_2)^{-m}Z^{\alpha}(K,h_1,h_2).$$

Вследствие (7), переход к пределам $h_i\to\infty$ и $h_i\to 0$, $i=1,2$ на исходной решетке приводит к следующим результатам на дуальной решетке:

1) $\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2\to 0$:

$$\lim\widetilde{Z}^{\alpha}(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2)=(2\cosh\widetilde{K})^{2m}\widetilde{Z}^{\alpha}_{(0,0)},\quad \alpha=a,p; \tag{14}$$

2) $\widetilde{h}_1 \to \infty$, $\widetilde{h}_2 \to \infty$:

$$\lim(2\cosh\widetilde{h}_1)^{-m}(2\cosh\widetilde{h}_2)^{-m}\widetilde{Z}^p(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2) = 2\left[\widetilde{Z}^p(\widetilde{K},\widetilde{K}) + \widetilde{Z}^p(\widetilde{K},-\widetilde{K})\right], \tag{15}$$

3) $\widetilde{h}_1 \to \infty$, $\widetilde{h}_2 \to 0$:

$$\lim(2\cosh\widetilde{h}_1)^{-m}\widetilde{Z}^\alpha(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2) = (2\cosh\widetilde{K})^m 2\widetilde{Z}^\alpha(\widetilde{K},0). \tag{16}$$

Здесь и ниже в стастических суммах на дуальной решетке явно выделена зависимость от внешних магнитных полей $\widetilde{K}$ и $-\widetilde{K}$.

Полагая в (12), (13) $\widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_2 = \widetilde{K}$ и, соответственно, $h_1 = h_2 = K$, мы получаем первые два соотношения дуальности для модели Изинга со свободными граничными условиями:

$$\frac{\widetilde{Z}^p_{(0,0)}}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}} = \frac{Z^p(K,K) + Z^p(K,-K)}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}}, \tag{17}$$

$$\frac{\widetilde{Z}^a_{(0,0)}}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}} = \frac{Z^p(K,K) - Z^p(K,-K)}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}}. \tag{18}$$

Напомним, что здесь мы имеем решетки с размерами $n \times m$ и $(n-1)\times m$ в левых и правых частях равенств, соответственно.

Теперь, используя (14)–(16) при взятии соответствующих пределов в (12)-(13), нетрудно получить следующие соотношения дуальности для ферромагнитной модели Изинга с различными граничными условиями:

$$\frac{(2\cosh\widetilde{K})^{2m}\widetilde{Z}^p_{(0,0)}}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}} = \frac{Z^p_{(+,+)} + Z^p_{(+,-)}}{(\cosh 2K)^{m(n-3)}}, \tag{19}$$

$$\frac{(2\cosh\widetilde{K})^{2m}\widetilde{Z}^a_{(0,0)}}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}} = \frac{Z^p_{(+,+)} - Z^p_{(+,-)}}{(\cosh 2K)^{m(n-3)}}, \tag{20}$$

$$\frac{\widetilde{Z}^p_F(\widetilde{K},\widetilde{K}) + \widetilde{Z}^p(\widetilde{K},-\widetilde{K})}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}} = \frac{Z^p_{(0,0)}}{(\cosh 2K)^{m(n-3)}}, \tag{21}$$

$$\frac{\widetilde{Z}^p(\widetilde{K},\widetilde{K}) - \widetilde{Z}^p(\widetilde{K},-\widetilde{K})}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}} = \frac{Z^a_{(0,0)}}{(\cosh 2K)^{m(n-3)}}, \tag{22}$$

$$\frac{(2\cosh\widetilde{K})^m\widetilde{Z}^p(\widetilde{K},0)}{(\cosh 2\widetilde{K})^{m(n-3)}} = \frac{Z^p_{(0,+)}}{(\cosh 2K)^{m(n-3)}}. \tag{23}$$

Заметим, что в отличие от (17), (18) в соотношениях (19), (20) мы имеем решетки с размерами $(n-2)\times m$ и $(n-1)\times m$ соответственно в левых и правых частях этих равенств.

Сделаем несколько коментариев по поводу соотношения (20). Используя результаты точного решения модели Изинга с магнитными полями на границах [5], нетрудно показать, что разность $Z^p(h_1,h_2) - Z^p(h_1,-h_2)$ пропорциональна

$\mathrm{sign}(h_1 \cdot h_2)$ и поэтому не возникает противоречия при взятии пределов $\tilde{h}_1 \to \infty$, $\tilde{h}_2 \to \infty$ и $\tilde{h}_1 \to \infty$, $\tilde{h}_2 \to -\infty$ при выводе (20).

Отметим, что проверкой справедливости соотношений дуальности (17)-(22) является предел критической точки. Действительно, используя результаты [5] в критической точке, можно показать, что соотношения (17)-(22) сводятся к

$$Z^p_{(0,0)} = Z^p_{(+,+)} + Z^p_{(+,-)},$$

которое было получено в [6].

Работа выполнена благодаря поддержке программы INTAS (грант 93-1038).

1. H.A.Kramers and G.H.Wannier, Phys. Rev. **60**, 252 (1941).
2. L.Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
3. L.P.Kadanoff and H.Ceva, Phys. Rev. **B3**, 3918 (1971).
4. А.И.Бугрий, В.Н.Шадура, *Влияние конечных размеров решётки на соотношение дуальности для 2D-модели Изинга* , Препринт ИТФ- 95-21Р, Киев (1995).
5. A.I.Bugrij and V.N.Shadura, Phys. Lett. A **150A**, 171 (1990).
6. J.L.Cardy, *"Conformal Invariance and Statistical Mechanics"*, In : "Fields, Strings and Critical Phenomena", Eds. E. Brezin and J. Zinn-Justin, Elsevier Science Pub. (1989).