Письма в ЖЭТФ, том 68, вып.4, стр.296 - 298

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ С ИНВАРИАНТАМИ ЛИФШИЦА

А.Богданов[1)]

Донецкий физико-технический институт НАНУ

340114 Донецк, Украина

Поступила в редакцию 7 июля 1998 г.

Исследованы статические решения для нелинейного векторного поля в моделях с инвариантами Лифшица. Показано, что в таких системах двухмерные и трехмерные локализованные состояния, связанные с релаксацией модуля векторного поля, радиально неустойчивы.

PACS: 11.27.+d, 75.25.+z, 75.30.Kz

В [1] теоретически исследовались статические локализованные состояния на дефектах кристаллической структуры в кубических магнетиках без центра инверсии. В частности, в [1] были получены решения для двухмерных (2D) и трехмерных (3D) локализованных состояний при температурах, выше температуры фазового перехода *парамагнетик – геликоид*. В этих структурах модуль вектора намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ непрерывно уменьшается от конечных значений в центре до нуля в парамагнитной матрице. В данной работе показано, что такие решения радиально неустойчивы. Более того, для достаточно общего вида полевых моделей с инвариантами Лифшица удается доказать неустойчивость статических, неоднородных по модулю вектора $\mathbf{m}$, локализованных состояний с размерностью пространственных неоднородностей $n \geq 2$.

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ с функционалом взаимодействия

$$\Phi = \int \left[A \left(\frac{\partial m_i}{\partial x_k} \right)^2 + D_{ijk} \left(m_i \frac{\partial m_j}{\partial x_k} - m_j \frac{\partial m_i}{\partial x_k} \right) + f(m_i) \right] d^n x. \tag{1}$$

Первый член в (1) характеризует жесткость системы, второй слагаемое включает сумму антисимметричных произведений, линейных по первым пространственным производным (инварианты Лифшица), и описывает специфические взаимодействия, имеющие место в системах без центра инверсии. Такие взаимодействия встречаются в определенных классах магнетиков [2], сегнетоэлектриков [3], жидких кристаллов [4], а также могут индуцироваться в ряде других систем [5, 6]. В частности, для кубических ферромагнетиков без центра инверсии и холестериков эта часть функционала имеет вид $\mathbf{m}\mathrm{rot}(\mathbf{m})$ [4, 7]. Наконец, последнее слагаемое в (1) описывает однородные взаимодействия в системе.

Под многомерными локализованными состояниями векторного поля $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ будем понимать такие несингулярные распределения $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$, которые являются экстремалями функционала (1), неоднородны по более чем одной пространственной координате ($n \geq 2$), и на больших расстояниях $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$ релаксирует к некоторой равновесной

1) e-mail: bogdanov@host.dipt.donetsk.ua

величине. Будем также предполагать, что энергетические вклады различных взаимодействий в (1), взятые по пространству изменения решений $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$, также имеют конечные значения:

$$I_A^{(n)} = \int A \left(\frac{\partial \tilde{m}_i}{\partial x_k}\right)^2 d^n x,\ I_D^{(n)} = \int D_{ijk} \left(\tilde{m}_i \frac{\partial \tilde{m}_j}{\partial x_k} - \tilde{m}_j \frac{\partial \tilde{m}_i}{\partial x_k}\right) d^n x,\ I_f^{(n)} = \int f(\tilde{m}_i) d^n x, \tag{2}$$

Расчет многомерных локализованных структур и проверка их устойчивости требуют решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Однако анализ энергии (1) при деформациях экстремалей типа $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) \to \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}/a)$ (где a – некоторое положительное число) позволяет сделать определенные заключения об устойчивости тех или иных структур. Таким путем было доказано отсутствие многомерных локализованных решений для функционалов достаточно общего вида (терема Хобарда – Деррика) [8] (см. также [9]). В работах [10, 11] было показано, что эта теорема неприменима к функционалам, содержащим члены, линейные по первым пространственным производным. Решения для 2D локализованных структур, полученные в ряде нецентросимметричных магнетиков (магнитные вихри) [10, 12, 13], а также в хиральных жидких кристаллах (аксиальные структуры) [14], демонстрируют определяющую роль инвариантов, линейных по первым пространственным производным, в стабилизации таких состояний. К настоящему времени такие 2D локализованные структуры были обнаружены в хиральном магнетике NiMn [15].

Перейдем теперь к исследованию устойчивости локализованных состояний, неоднородных по модулю вектора $\mathbf{m}$. Запишем энергию (1) для 2D ($n = 2$) и 3D ($n = 3$) векторных конфигураций $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})/(1 + k)$:

$$\Phi = \Phi(\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})) + (I_D^{(2)} + 2I_f^{(2)})k + I_f^{(2)} k^2, \tag{3}$$

$$\Phi = \Phi(\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})) + (I_A^{(3)} + 2I_D^{(3)} + 3I_f^{(3)})k + (I_D^{(3)} + 3I_f^{(3)}))k^2 + I_f^{(3)} k^3, \tag{4}$$

Для устойчивости экстремалей $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$ коэффициенты при линейных k членах в (3) и (4) должны быть равны нулю, а при квадратичных – положительны. Из этих условий, а также из положительности $I_A^{(3)}$ следует, что необходимым условием устойчивости D и D локализованных структур является отрицательность энергетического вклада, связанного с инвариантами, линейными по первым пространственным производным ($I_D^{(n)} < 0$) [10, 11]. Особого рассмотрения требуют 2D локализованные структуры с $I_D^{(2)} = 0$. В этом случае, согласно (3), энергия (1) для векторных конфигураций $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})/(1 + k)$, не являющихся решениями уравнений Эйлера, равна энергии для экстремали $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$, которые переводят его в состояние с более низкой энергией, и, следовательно, данные решения неустойчивы.

Вводя сферические координаты для $\mathbf{m} = (m \sin(\theta)\cos(\psi),\ m \sin(\theta)\sin(\psi),\ m\cos(\theta))$, функционал (1) можно представить в следующем виде:

$$\Phi = \int [A(\partial m/\partial x_k)^2 + G(m, \theta, \psi, \theta_{x_k}, \psi_{x_k})] d^n x. \tag{5}$$

В силу структуры инвариантов Лифшица, в функционале (5) отсутствуют линейные по $(\partial m/\partial x_k)$ члены. Поэтому при деформациях типа $m(\mathbf{r}) \to m(\mathbf{r}/a)$ в выражениях (3), (4) $I_D^{(n)} = 0$, и, следовательно, данные локализованные состояния неустойчивы.

Итак, в нецентросимметричных системах устойчивость многомерных локализованных состояний обусловлена стабилизирующей ролью взаимодействий, описываемых инвариантами Лифшица. Поскольку эти взаимодействия зависят от пространственных производных угловых переменных векторного поля и не зависят от производных модуля $\mathbf{m}$, устойчивыми могут быть только многомерные локализованные структуры, неоднородные по угловым переменным. Это подтверждается расчетами 2D локализованных состояний в конкретных системах [10–14].

Автор благодарит фонд Александра фон Гумбольдта за финансовую поддержку, а также С.В.Тарасенко за обсуждение работы.

---

1. A.Buzdin and Y.Meurdesoif, Pis'ma v ZhETF **65**, 776 (1997).
2. И.Е.Дзялошинский, ЖЭТФ **46**, 1420 (1964).
3. R.Blink and A.P.Levanyuk, *Incommensurate phases in dielectrics*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
4. P.G.de Gennes and J.Prost, *The physics of liquid crystals*, Clarendon press, Oxford, 1993.
5. T.M.Giebultowicz, H.Luo, N.Samarth et al., IEEE Trans. Mag. **29**, 3383 (1993).
6. A.Fert and P.M.Levy, Phys. Rev. Lett. **44**, 1538 (1980).
7. P.Bak and M.H.Jensen, J. Phys. C: Solid State Phys. **13**, L881 (1980).
8. G.H.Derrick, J.Math. Phys. (New York) **5**, 1252 (1964).
9. В.Г.Маханьков, Ю.П.Рыбаков, В.И.Санюк, УФН **164**, 121 (1994).
10. A.N.Bogdanov and A.Hubert, Phys. Stat. Sol. (b) **186**, 527 (1994).
11. А.Богданов, Письма в ЖЭТФ **62**, 231 (1995).
12. А.Н.Богданов, Д.А.Яблонский, ЖЭТФ **95**, 178 (1989); А.Н.Богданов, М.В.Кудинов, Д.А.Яблонский, ФТТ **31**, 99 (1989).
13. A.N.Bogdanov and A.Hubert, JMMM **138**, 255 (1994).
14. А.Н.Богданов, А.А.Шестаков, ФНТ **23**, 1024 (1997); ЖЭТФ **113**, 1675 (1998).
15. T.Ando, E.Ohta, and T.Sato, JMMM **163**, 277 (1996).