

САМООРГАНИЗАЦИЯ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В ЦЕПОЧКЕ СКВИД

С.Л.Гинзбург, Н.Е.Савицкая

Санкт-Петербургский институт ядерной физики
188350 Гатчина, Россия

Поступила в редакцию 22 сентября 1998 г.

Изучено критическое состояние одномерного гранулированного сверхпроводника (цепочки СКВИД (1D Josephson Junctions Array)), исходя из системы дифференциальных уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз, и установлено, что оно является самоорганизованным. Показано, что задачи о самоорганизации в модели "кучи песка" и в гранулированном сверхпроводнике принадлежат одному классу универсальности.

PACS: 64.60.Lx, 74.50.+g

Интерес к изучению гранулированных сверхпроводников возрос после открытия высокотемпературной сверхпроводимости, когда выяснилось, что большинство ВТСП материалов может быть реализовано в виде гранулированных систем. Так, в последнее время, появился ряд теоретических работ по изучению магнитных свойств гранулированных сверхпроводников (ГСП), где в качестве модели такой системы взята упорядоченная решетка связанных между собой джозефсоновских контактов [1–3]. В работах [1, 2] было показано, что подобно жестким сверхпроводникам второго рода такие системы приходят в критическое состояние (КС), которое может быть описано моделью Бина [4]. В то же время при большой величине основного параметра системы $V \sim j_c a^3 / \Phi_0$ (j_c – плотность критического тока на контакте, a – постоянная решетки, Φ_0 – квант магнитного потока) в каждой ячейке решетки, а следовательно, и во всей системе в целом, имеется большое число метастабильных состояний [3].

Наличие большого числа метастабильных состояний является характерной чертой систем, в которых наблюдается явление самоорганизованной критичности (СОК) [5]. Оно заключается в том, что динамическая система в процессе своей эволюции приходит в КС, которое в дальнейшем является самоподдерживающимся, не требующим для своего существования точной подстройки внешних параметров. По структуре возникающее КС представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством "лаvin", возникающих в результате локального внешнего возмущения. Такое КС называется самоорганизованным, а критерием существования СОК в системе считается степенная зависимость плотности вероятности размеров лавин. Концепция СОК является чрезвычайно общей и применима для описания поведения динамических систем, принадлежащих к различным областям современной науки. Однако, несмотря на это, до сих пор изучение СОК проводилось лишь в модельных системах, которые сложно реализовать на практике, а экспериментальные исследования СОК были проведены только на куче песка [6]. Обнаружение СОК в ГСП дало бы возможность перейти к исследованию этого явления в реальных системах, которые можно изучать не только теоретически, но и экспериментально.

Возможность самоорганизации КС в ГСП при $V \gg 1$ рассматривалась в работе [7], где была введена и изучена упрощенная модель ГСП. При построении этой модели, используя физические особенности поведения системы при $V \gg 1$, система дифференциальных уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз на контактах, описывающая ГСП, была заменена на систему отображений (уравнений с дискретным временем) для токов через контакты. Оказалось, что для двумерного многоконтактного СКВИД полученная система отображений эквивалентна классической модели для изучения СОК – абелевой модели "кучи песка" (АМКП) [8]. Таким образом, было показано, что критическое состояние в упрощенной модели многоконтактного СКВИД, описываемой системой отображений, является самоорганизованным.

Однако поведение реальных ГСП описывается дифференциальными уравнениями, и делать вывод о существовании в них СОК, опираясь лишь на упрощенную модель, нельзя, так как введенные упрощения могли привести как к потере моделью некоторых свойств исходной системы, так и к возникновению новых, не свойственных исходной системе качеств. Поэтому, во-первых, остается задача исследования критического состояния ГСП, исходя непосредственно из системы дифференциальных уравнений для разности фаз, а, во-вторых, – вопрос о том, в какой степени упрощенная модель отражает реальную картину поведения исходной системы. В данной работе мы изучаем обе эти проблемы на примере одномерного ГСП (цепочки СКВИД).

Исходя из системы дифференциальных уравнений для разности фаз, мы показываем, что КС в цепочке СКВИД является самоорганизованным. В работе также продемонстрировано, что поведение упрощенной модели, описываемой системой отображений, полностью эквивалентно поведению исходной системы, описываемой дифференциальными уравнениями.

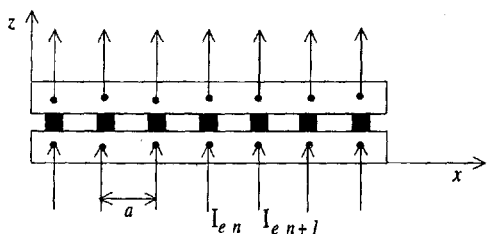


Рис.1. Цепочка СКВИД. a – расстояние между контактами, I_{en} – ток, инжектируемый в n -ый контакт

Цепочка СКВИД представляет собой две сверхпроводящие пластины, бесконечные по оси y , соединенные между собой джозефсоновскими контактами в точках с координатами $x = an, n = 1, \dots, N$ [9], рис.1. Система уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз на контактах φ_n в безразмерном виде запишется следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}
 V \sin \varphi_n + \tau \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} &= -2\varphi_n + \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} + 2\pi F_{en}, \quad n \neq 1, N; \\
 V \sin \varphi_1 + \tau \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi F_{e1}, \\
 V \sin \varphi_N + \tau \frac{\partial \varphi_N}{\partial t} &= -\varphi_N + \varphi_{N-1} + 2\pi F_{eN}, \\
 V &= 2\pi \frac{4\pi a S j_c}{\Phi_0}, \quad F_{en} = \frac{4\pi j_{en} a S}{\Phi_0}, \quad \tau = \frac{4\pi a S}{\rho},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где j_c – плотность критического джозефсоновского тока, ρ – поверхностное сопротивление контакта, j_{en} – плотность тока инжекции в контакте, S – площадь ячейки между двумя контактами. Параметр V является важнейшей характеристикой системы и в дальнейшем мы будем считать $V \gg 1$. При этом условии каждый из СКВИД, составляющих нашу систему, имеет большое число метастабильных состояний [9].

При $V \gg 1$, как и в работах [7, 10] мы введем в рассмотрение систему отображений для безразмерных токов через контакты

$$z_n = \frac{V}{2\pi} \sin \varphi_n + \frac{\tau}{2\pi} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t},$$

которая имеет вид [7]

$$\begin{aligned} z_n(k+1) &= z_n(k) - 2[\theta[z_n(k) - z_c] - \theta[-z_n(k) - z_c]] + [\theta[z_{n+1}(k) - z_c] - \\ &\quad - \theta[-z_{n+1}(k) - z_c]] + [\theta[z_{n-1}(k) - z_c] - \theta[-z_{n-1}(k) - z_c]] + \\ &\quad + (F_{en}(k+1) - F_{en}(k)), n \neq 1, N; \\ z_1(k+1) &= z_1(k) - [\theta[z_1(k) - z_c] - \theta[-z_1(k) - z_c]] + \\ &\quad + [\theta[z_2(k) - z_c] - \theta[-z_2(k) - z_c]] + (F_{e1}(k+1) - F_{e1}(k)); \\ z_N(k+1) &= z_N(k) - [\theta[z_N(k) - z_c] - \theta[-z_N(k) - z_c]] + \\ &\quad + [\theta[z_{N-1}(k) - z_c] - \theta[-z_{N-1}(k) - z_c]] + (F_{eN}(k+1) - F_{eN}(k)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $z_c = V/2\pi$ – безразмерный критический ток, $\theta[z]$ – θ -функция Хевисайда, k – дискретное время, F_{en} – то же, что и в (1).

Система (2) может быть переписана в виде алгоритмов, с помощью которых принято записывать уравнения динамики систем в задачах с СОК [5]. Система отображений (2) для токов является обобщением на случай двух порогов алгоритма для изменения наклона в модели одномерной "кучи песка", рассматриваемой в [11, 12], в которой учитывалось лишь одно пороговое значение z_c и правая граница была открыта, то есть $z_{N+1} = 0$. В работах [11, 12] было показано, что возможность реализации СОК в одномерном случае зависит от способа возмущения. Определим этот способ для нашей системы.

Для изучаемой в работах [11, 12] системы было показано, что в ней реализуется СОК, если выбрать следующий способ возмущения. Если все $z_n < z_c$, то

$$z_m \rightarrow z_m + h; \quad z_{m+1} \rightarrow z_{m+1} - h, \quad (3)$$

где m – случайно выбранный узел, $m \neq N$, а $h = 1/2$. Обобщим этот способ возмущения на наш случай, в котором воздействие на систему в метастабильном состоянии описывается токами инжекции. Тогда для отображений (2) способ возмущения (3) означает, что мы должны взять $F_{en}(k+1) - F_{en}(k) = 0$ для всех n , если хоть на одном контакте $|z_n(k)| > z_c$, и $F_{em}(k+1) - F_{em}(k) = 1/2$, $F_{em+1}(k+1) - F_{em+1}(k) = -1/2$, если система находится в метастабильном состоянии, m – случайно выбранный контакт, $m \neq N$.

Для системы дифференциальных уравнений (1) такой способ возмущения дает следующее правило. Если система находится в метастабильном состоянии, то

$$F_{em} \rightarrow F_{em} + 1/2; \quad F_{em+1} \rightarrow F_{em+1} - 1/2. \quad (4)$$

Используя воздействие, описываемое выражением (4), мы изучали КС цепочки СКВИД, описываемой системой (1), методом машинного моделирования при $V = 40$, $\tau = 1$ в следующем режиме. Начиная с состояния, в котором все $\varphi_n(0) = 0$, возмущаем систему, инжектируя в нее ток по правилу (4), после чего позволяем ей полностью отрелаксировать к метастабильному состоянию, согласно уравнениям (1) с фиксированными значениями токов инжекции, затем вновь возмущаем систему согласно (4) и так далее. В наших расчетах мы полагали, что система полностью отрелаксировала, если все $\partial\varphi_n/\partial t < 10^{-8}$.

В результате мы наблюдали, что возникающее после переходного периода в системе критическое состояние представляет собой набор переходящих друг в друга метастабильных состояний, в которых значения безразмерных токов $z_{nst} = z_c \sin \varphi_n$ в левой части решетки положительны и близки к критическому значению z_c , а в правой – отрицательны и близки к $-z_c$, рис.2а. Подобная картина напоминает критическое состояние в модели Бина, однако там имеется лишь одно метастабильное состояние, в которое система возвращается каждый раз после очередного возмущения. В нашем же случае после возмущения система релаксирует к другому метастабильному состоянию, в котором разделение на "положительную" и "отрицательную" части сохраняется, но значения токов на контактах несколько изменяются. Именно такое поведение характерно для систем с самоорганизацией.

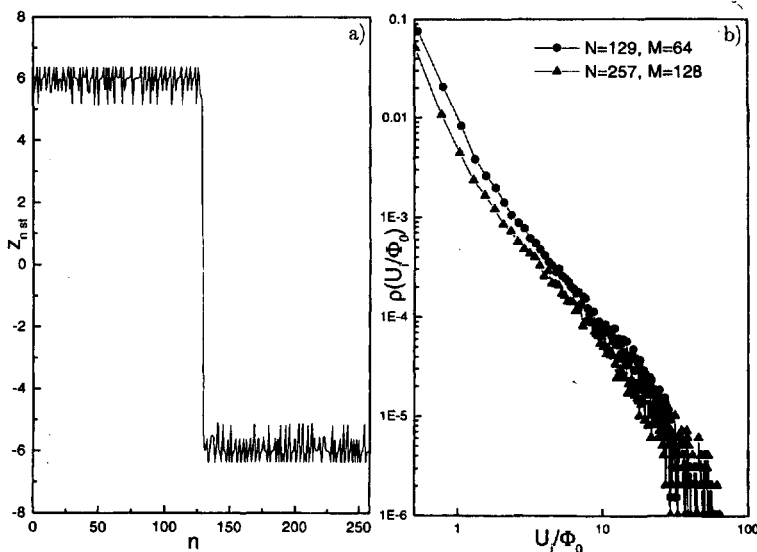


Рис.2. а) Одно из метастабильных состояний, составляющих критическое состояние цепочки СКВИД. б) Плотности вероятности для величин U_i/Φ_0 для СКВИД с размерами $N = 257$ и $N = 129$; $\rho(U_i/\Phi_0) \approx (U_i/\Phi_0)^\alpha$, $\alpha \approx -1.75$ при $N = 257$, $\alpha \approx -1.80$ при $N = 129$

Заметим, что в случае одномерной "кучи песка" разделения системы на положительную и отрицательную части не возникает [11, 12], хотя там также имеются как положительные, так и отрицательные наклоны. В нашем случае разделение связано с тем, что в системе имеется два пороговых значения токов. Интересной особенностью нашей системы является также то, что разделение происходит, несмотря на то, что положительные и отрицательные токи инжектируются в случайно выбранные контакты.

Для того чтобы проверить, является ли критическое состояние самоорганизованным, в задаче о "куче песка" вычисляется размер лавины по следующей формуле:

$$T_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=k_{bi}}^{k_{ei}} \theta(z_n(k) - z_c), \quad (5)$$

где k_{bi} – момент начала i -ой лавины, k_{ei} – момент ее окончания. Если плотность вероятности $\rho(T_i)$ подчиняется степенному закону, то система является самоорганизованной.

При введении аналогичной величины для нашего случая, мы будем рассматривать лишь положительную часть системы. Это связано с тем, что, как видно из уравнений (1), наша система является закрытой, то есть для нее не выполняется одно из важнейших условий существования СОК – возможность стока. Однако отдельно для положительной и отрицательной частей системы существует процесс, заменяющий сток. Он состоит в том, что избыточный положительный ток, не имея возможности покинуть систему через границу, уходит в отрицательную часть системы, и аннигилирует там с отрицательным током, аналогично избыточный отрицательный ток сбрасывается в положительную часть. Таким образом, можно считать, что граница, между положительной и отрицательной подсистемами для каждой из них эффективно выполняет роль открытой границы. То есть положительная часть является системой с одной открытой границей и в ней может реализоваться СОК.

Назовем в нашем случае "лавиной" процесс прихода системы в новое метастабильное состояние после очередного возмущения по способу (4). В модели "кучи песка" T_i увеличивалось на единицу каждый раз, когда наклон "кучи" в каком-либо узле превышал критическое значение. Так как в нашем случае аналогом наклона является ток, то это означает, что ток в некотором контакте превысил критический. При этом на контакте фаза скачком меняется на 2π [9] и, следовательно, происходит скачок напряжения, так как, согласно выражению для нестационарного эффекта Джозефсона, напряжение на n -ом контакте в момент времени t представляется в виде

$$u_n(t) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}. \quad (6)$$

То есть аналогом величины (5) в нашем случае является усредненный по положительной части решетки интеграл от напряжения по времени лавины:

$$U_i = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \int_{t_{ib}}^{t_{ie}} u_n(t) dt, \quad (7)$$

где M – число узлов в положительной части решетки, t_{ib} – момент начала i -ой лавины, t_{ie} – момент окончания i -ой лавины. Тогда для U_i имеем следующее выражение:

$$U_i = \frac{\Phi_0}{2\pi M} \sum_{n=1}^M [\varphi_n(t_{ei}) - \varphi_n(t_{bi})]. \quad (8)$$

В процессе численного моделирования для каждой лавины вычислялась величина U_i/Φ_0 , а затем рассчитывалась ее плотность вероятности $\rho(U_i/\Phi_0)$. На рис.2б представлены $\rho(U_i/\Phi_0)$ для СКВИД с числом контактов $N = 257$ и $N = 129$, положительная часть которых имеет размер $M = 128$ и $M = 64$, соответственно.

Видно, что $\rho(U_i/\Phi_0)$ демонстрирует степенное поведение $\rho(U_i/\Phi_0) \sim (U_i/\Phi_0)^\alpha$ ($\alpha \approx -1.75$ для $N = 257$, $\alpha \approx -1.80$ для $N = 129$), что говорит о том, что в положительной части системы реализуется СОК.

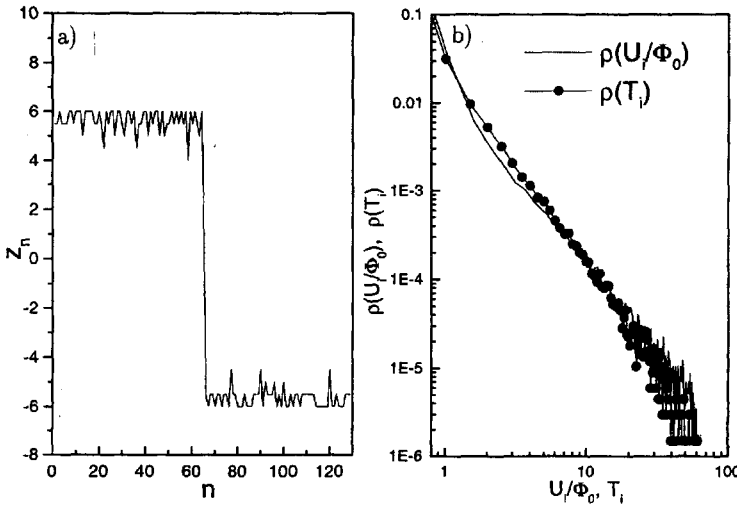


Рис.3. а) Метастабильное состояние в упрощенной модели цепочки СКВИД. б) Плотности вероятности U_i/Φ_0 и T_i для случая $N = 257$.

В заключение приведем результаты сравнения поведения упрощенной модели, описываемой системой отображений (2), и исходной системы, описываемой уравнениями (1). Мы изучили модель (2) в том же режиме и с тем же способом возмущения, что и в случае исходной системы (1). Структура возникающего в этом случае критического состояния полностью аналогична той, которая наблюдалась при использовании для описания системы дифференциальных уравнений (рис.3а). Мы также вычислили плотность вероятности T_i для положительной части системы в упрощенной модели и сравнили ее с полученной плотностью вероятности U_i/Φ_0 в случае описания системы дифференциальными уравнениями, результаты представлены на рис.3б. Полученное соответствие говорит о том, что упрощенная модель точно отражает основные особенности поведения исходной системы и принадлежит к тому же классу универсальности, а сделанные в работе [7] упрощающие предположения не ведут к потере моделью основных свойств исходной системы.

Основные результаты данной работы можно сформулировать следующим образом.

Во-первых, исходя из системы дифференциальных уравнений для разности фаз, установлено, что критическое состояние в цепочке СКВИД является самоорганизованным. Тем самым описана физическая система, которая может быть реализована экспериментально и в которой существует СОК. Полученный результат представляется важным в связи с тем, что в последние годы стало возможным промышленное создание решеток джозефсоновских контактов и можно надеяться на то, что описанная система станет удобным экспериментальным объектом для практического изучения СОК.

Во-вторых, показано, что упрощенная модель цепочки СКВИД, которая является обобщением модели "кучи песка", и исходная система, описываемая дифференциальными уравнениями, принадлежат к одному классу универсальности.

Заметим также, что в нашем случае СОК реализуется в закрытой системе, благодаря наличию процесса аннигиляции, эффективно заменяющего сток. Подобная ситуация будет более подробно рассмотрена в последующих работах.

Авторы выражают благодарность О.В.Герашенко и М.А.Пустовойту за ценные замечания.

Работа поддержана Научным советом направления "Сверхпроводимость" программы "Актуальные направления физики конденсированных сред" и выполнена в рамках проекта # 96021 "Профиль". Работа также поддержана подпрограммой "Статистическая физика" Государственной научно-технической программы "Физика квантовых и волновых процессов" по проекту VIII-3 и Государственной программой "Нейтронные исследования вещества".

-
1. D.-X.Chen, J.J.Moreno, and A.Hernando, Phys. Rev. **B53**, 6579 (1996).
 2. D.-X.Chen, A.Sanches, and A.Hernando, Phys. Rev. **B50**, 10342 (1994)
 3. A.Manjofer and T.Wolf, Phys. Rev. **B47**, 5383 (1993).
 4. C.P.Bean, Rev. Mod. Phys. **36**, 31 (1964).
 5. P.Bak, C.Tang, and K.Wisenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
 6. G.A.Held, D.H.Solina, II, D.T.Keane et al., Phys. Rev. Lett. **65**, 1120 (1990).
 7. С.Л.Гинзбург, ЖЭТФ, **106**, 607 (1994).
 8. D.Dhar, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990)
 9. К.К.Лихарев, *Введение в динамику джозефсоновских переходов*. М.: Наука, 1985.
 10. S.L.Ginzburg, M.A.Pustovoit, and N.E.Savitskaya, Phys. Rev. **E57**, 1319 (1998).
 11. L.Kadanoff, S.R.Nagel, L.Wu, and S.-m.Zhou, Phys.Rev. **A39**, 6524 (1989).
 12. S.T.R.Pinho, C.P.C.Prado, and S.R.Salinas, Phys. Rev. **E55**, 2159 (1997).