РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ *ТОМ 63, ВЫПУСК 9*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД *10 МАЯ, 1996*

Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.9, стр.673 - 678 © 1996г. 10 мая

О ПРОБЛЕМЕ КВАНТОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНО ПРИВОДИМЫХ СВЯЗЕЙ ПЕРВОГО РОДА

А.В. Галажинский, А.А. Дериглазов[1)]

Томский государственный университет
634050 Томск, Россия

Поступила в редакцию 19 марта 1996 г.
После переработки 26 марта 1996 г.

Для класса теорий (включающего $D = 10$ суперструны и суперчастицы в ковариантной формулировке) предложена в гамильтоновой форме явно ковариантная схема достраивания бесконечно приводимых фермионных связей первого рода (БПС1) до неприводимых. Модифицированная формулировка, которая получается после применения схемы к теории, включающей только БПС1, содержит неприводимые связи первого рода и отделенные от них неприводимые связи второго рода.

PACS: 11.30.Pb

Задача, состоящая в построении схемы явно ковариантного квантования для динамических систем со смешанными связями первого и второго рода, весьма актуальна, поскольку суперструна Грина–Шварца [1] и суперчастица Бринка–Шварца [2] относятся к этому классу теорий (в исходной формулировке явно Пуанкаре ковариантное разделение фермионных связей по родам неприводимым образом невозможно[2)]). Общий метод БФВ-квантования, не предполагающий явного разделения связей по родам, был развит в серии работ [3], однако в работе [4] было показано, что применение его в конкретных моделях с сохранением явной ковариантности проблематично.

Альтернативная возможность для обсуждаемого класса теорий заключается в применении ковариантных проекторов, позволяющих перейти к отделенным наборам, состоящим из линейно зависимых связей первого и второго рода. Проекторы с нужными свойствами известны для суперструны Грина–Шварца

[1)] e-mail: deriglaz@phys.tsu.tomsk.su

[2)] Мы обсуждаем, в основном, случай теорий в $D = 10, N = 1$ суперпространстве.

[5], $N=1, D=9$ массивной суперчастицы [4, 5] и $N=1, D=10$ суперчастицы Бринка–Шварца [4, 6]. Задача сводится к квантованию линейно зависимых связей второго рода (учет которых в ковариантном виде рассмотрен в [4, 6]) и квантованию линейно зависимых связей первого рода бесконечного порядка приводимости. К сожалению, непосредственное применение БФВ-методов в последнем случае приводит к необходимости оперировать с бесконечной башней духов (см. [7] и ссылки там же), что существенно усложняет анализ моделей, в частности изучение когомологий BRST-заряда [7], и построение эффективно вычисляемого производящего функционала.

В настоящей работе предложена (в гамильтоновой форме) схема достраивания бесконечно приводимых связей 1 рода (БПС1) до системы связей конечного порядка приводимости. Для этого фазовое пространство исходной теории расширяется дополнительными переменными, нединамический характер которых обеспечен некоторым специально подобранным набором связей. Предлагаемый трюк состоит в возможности скомбинировать БПС1 расширенной формулировки в ковариантные семейства связей первого и второго рода, причем конечного (не выше первого) ранга приводимости. К такой системе связей можно применить стандартные методы квантования [8], в частности построить квантовую механику с конечным набором духовых полей.

Будут рассмотрены два различных случая. В первой части статьи схема сформулирована для динамической системы со смешанными фермионными связями. Модифицированная формулировка в этом случае содержит неприводимые связи первого рода (C1P) и отделенные от них линейно зависимые связи второго рода (C2P). Во второй части рассмотрен случай теории, в которой имеются только фермионные БПС1 и отсутствуют связи второго рода. Такая ситуация имеет место для суперчастицы Зигеля [9] и ее обобщений [7, 10], а также для суперструны Зигеля [11]. После необходимых модификаций мы приходим к теории с неприводимыми C2P и отделенными от них C1P не выше первого порядка приводимости. Отметим, что хотя предлагаемый трюк непосредственно применим только к системе связей специального вида (см. (1) ниже), класс таких теорий достаточно широк, в частности включает все упомянутые выше модели суперструн и суперчастиц.

Привлекательность описываемой схемы, на наш взгляд, состоит в следующем: а) для комбинирования связей в неприводимые семейства необходимо сравнительно небольшое число вспомогательных переменных. Отметим также, что метод не требует введения твисторо-подобных переменных; б) существует ковариантная калибровка как для исходных, так и для вспомогательных переменных (см. для сравнения, например, работу [12]).

Поскольку работа выполнена в гамильтоновом формализме, необходимо изучить вопрос об эквивалентности физической динамики модифицированной и исходной моделей. Для этого желательно построить лагранжево действие, приводящее к модифицированной системе связей, и сравнить его с исходным. Эти вопросы будут разобраны в отдельной публикации.

Рассмотрим динамическую систему, для которой среди переменных фазового пространства z^A имеются сопряженные пары $(\theta^\alpha, p_{\theta\alpha})$, $\alpha = 1, \ldots, 16$, где θ^α — майорано-вейлевский спинор группы Лоренца $SO(1,9)$. Мы используем вещественные симметричные 16×16 Г-матрицы $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$, $\tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}$, удовлетворяющие условию $\Gamma^\mu \tilde{\Gamma}^\nu + \Gamma^\nu \tilde{\Gamma}^\mu = -2\eta^{\mu\nu}$. Предполагается, что полная система связей теории содержит (среди прочих) следующие:

$$L_\alpha \equiv p_{\theta\alpha} - iB_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\theta^\beta \approx 0, \quad D^\mu D_\mu \approx 0, \tag{1}$$

и скобки Пуассона фермионных связей имеют вид

$$\{L_\alpha, L_\beta\} = 2iD_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Здесь $B^\mu(z)$,$D^\mu(z)$ – некоторые комбинации переменных теории, причем $D^2 \approx \approx 0$ — связь первого рода. В полной системе связей могут присутствовать связи, отличные от (1), не представляющие проблемы при квантовании и несущественные для дальнейшего анализа.

Уравнения (1), (2) соответствуют суперчастице Бринка-Шварца, если положить $B^\mu = D^\mu = p^\mu$, где p^μ — импульсы, сопряженные к координатам x^μ. Случаю суперструны Грина-Шварца соответствует $B^\mu \equiv p^\mu + \partial_1 x^\mu - i\theta\Gamma^\mu\partial_1\theta$, $D^\mu \equiv p^\mu + \partial_1 x^\mu - 2i\theta\Gamma^\mu\partial_1\theta$. При этом бозонная связь $D^2 \approx 0$ может быть отделена от $L_\alpha \approx 0$ переходом к эквивалентной: $D^2 \to D'^2 \equiv D^2 - 4L_\alpha\partial_1\theta^\alpha \approx 0$ [1, 5].

Уравнения (1), (2), в частности, означают, что в теории имеются восемь фермионных С1Р и восемь С2Р, нетривиально скомбинированных в Пуанкаре ковариантных уравнениях $L_\alpha \approx 0$. Чтобы отделить их ковариантным образом, расширим фазовое пространство парой переменных $(\Lambda^\mu, p_\Lambda^\mu)$, подчиненных связям

$$\Lambda^2 \approx 0, \qquad p_\Lambda^\mu \approx 0. \tag{3}$$

В предположении $\Lambda D \neq 0$ (аналог стандартной сингулярности координат светового конуса) из системы (3) выделяются две С2Р: $\Lambda^2 \approx 0$, $p_\Lambda D \approx 0$, и девять С1Р: $\tilde{p}_\Lambda^\mu \equiv p_\Lambda^\mu - \frac{p_\Lambda D}{\Lambda D}\Lambda^\mu \approx 0$ (имеется одно тождество $D_\mu \tilde{p}_\Lambda^\mu \equiv 0$). Тем самым обеспечен нединамический характер дополнительных переменных. Заметим теперь, что по построению $(\Lambda_\mu + D_\mu)\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ — обратимая матрица, поэтому система $L_\alpha = 0$ эквивалентна следующей:

$$L^{(1)\alpha} \equiv D_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} L_\beta \approx 0, \tag{4}$$

$$L^{(2)\alpha} \equiv \Lambda_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} L_\beta \approx 0, \tag{5}$$

где среди С1Р $L^{(1)} \approx 0$ и С2Р $L^{(2)} \approx 0$ имеется по 8 линейно независимых.

Чтобы достроить БПС1 (4) до неприводимых, расширим фазовое пространство еще одной парой переменных $(\chi^\alpha, p_{\chi\alpha})$, нединамический характер которых обеспечен следующими связями[3]:

$$p_{\chi\alpha} \approx 0, \qquad T_\alpha \equiv \Lambda_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\chi^\beta \approx 0. \tag{6}$$

В этой системе имеется 8 независимых С1Р среди $p_\chi^{(1)} \equiv \Lambda_\mu \tilde{\Gamma}^\mu p_\chi \approx 0$ и 8+8 независимых С2Р среди $p_\chi^{(2)} \equiv D_\mu \tilde{\Gamma}^\mu p_\chi \approx 0$, $\Lambda_\mu \Gamma^\mu \chi \approx 0$. Отметим, что к С1Р может быть наложена калибровка $D_\mu \Gamma^\mu \chi = 0$, после чего вся система уравнений (связи + калибровка) просто эквивалентна следующей: $p_\chi \approx 0$, $\chi \approx 0$.

В расширенной таким образом формулировке имеется возможность скомбинировать часть связей в неприводимые семейства. Действительно, поскольку

---

[3]При этом вместо $\tilde{p}_\Lambda^\mu \approx 0$ связями первого рода будут следующие: $p_\Lambda^\mu - \frac{p_\Lambda D}{\Lambda D}\Lambda^\mu + \frac{1}{2\Lambda D} p_\chi \tilde{\Gamma}^\nu D_\nu \Gamma^\mu \chi \approx 0$.

$(\Lambda_\mu + D_\mu)\Gamma^\mu$ — обратимая матрица, система уравнений (4)–(6) эквивалентна следующей:

$$\Phi^\alpha \equiv L^{(1)\alpha} + p_\chi^{(1)\alpha} = D_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} L_\beta + \Lambda_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} p_{\chi\beta} \approx 0, \tag{7}$$

$$G^\alpha \equiv L^{(2)\alpha} + p_\chi^{(2)\alpha} = \Lambda_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} L_\beta + D_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} p_{\chi\beta} \approx 0, \tag{8}$$

$$T_\alpha \equiv \Lambda_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \chi^\beta \approx 0, \tag{9}$$

где $\Phi^\alpha \approx 0$ — 16 неприводимых C1P, $G^\alpha \approx 0$ – 16 неприводимых C2P и $T_\alpha \approx 0$ содержит 8 линейно независимых C2P. В итоге для модифицированной формулировки (3) связи (7)–(9) отделены по родам, C1P неприводимы, а ситуация со связями второго рода "не ухудшилась" по сравнению с исходной формулировкой (1).

Отметим, что в некоторых конкретных моделях описанный выше трюк может быть использован без введения пары переменных $(\Lambda^\mu, p_\Lambda^\mu)$:

a) $D = 9$ массивная суперчастица с членом Весса–Зумино. В этом случае в теории имеется постоянная лоренц-инвариантная матрица $z_{\alpha\beta}$, которую можно использовать для построения ковариантных проекторов и отделения связей по родам [5, 4].

b) $D = 10, N = 1$ суперструна Грина–Шварца. В этом случае в качестве Λ^μ можно выбрать $\Lambda^\mu \equiv p^\mu - \partial_1 x^\mu$, поскольку $(p^\mu - \partial_1 x^\mu)^2 \approx 0$ — одна из связей Вирасоро.

Заметим также, что для суперчастицы Бринка–Шварца допустим набор связей

$$\Lambda^2 \approx 0, \qquad \Lambda D - 1 \approx 0, \qquad p_\Lambda^\mu \approx 0 \tag{10}$$

вместо (3). Из этой системы выделяются 4 C2P: $\Lambda^2 \approx 0$, $p_\Lambda D \approx 0$, $\Lambda D - 1 \approx 0$, $p_\Lambda \Lambda \approx 0$, тогда как 8 независимых C1P содержатся в уравнениях $\tilde{p}_\Lambda^\mu \equiv p_\Lambda^\mu - (p_\Lambda D)\Lambda^\mu - (p_\Lambda \Lambda) D^\mu = 0$. При этом тождества, характеризующие приводимость последних, $D_\mu \tilde{p}_\Lambda^\mu = \Lambda_\mu \tilde{p}_\Lambda^\mu = 0$, выполнены только на поверхности связей второго рода, в отличие от (3).

Перейдем к случаю теории, в которой имеются только БПС1 и нет связей второго рода, то есть вместо (1), (2) полагаем

$$L^{(1)\alpha} \equiv D_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}(p_\theta - iB_\mu \Gamma^\mu \theta)_\beta \approx 0, \qquad D^\mu D_\mu \approx 0, \tag{11}$$

$$\{L^{(1)\alpha}, L^{(1)\beta}\} \approx 0. \tag{12}$$

(В частном случае суперчастицы Зигеля имеем $D^\mu = B^\mu = p^\mu$, и фермионные связи сводятся к $L^{(1)} \equiv p_\mu \Gamma^\mu p_\theta \approx 0$.)

Повторяя процедуру, изложенную выше, приходим к следующей системе связей в фазовом пространстве, расширенном парами $(\Lambda^\mu, p_\Lambda^\mu)$, $(\chi^\alpha, p_{\chi\alpha})$:

$$\begin{gathered} D^2 \approx 0, \qquad \Lambda^2 \approx 0, \qquad p_\Lambda^\mu \approx 0, \\ \Phi^\alpha \equiv L^{(1)\alpha} + \Lambda_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} p_{\chi\beta} \approx 0, \end{gathered} \tag{13}$$

$$p_\chi^{(2)\alpha} \equiv D_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} p_{\chi\beta} \approx 0, \tag{14}$$

$$T_\alpha \equiv \Lambda_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \chi^\beta \approx 0. \tag{15}$$

В отличие от предыдущего случая, C2P (14), (15) не могут быть непосредственно скомбинированы явно ковариантным образом, поскольку образуют два неэквивалентных представления $SO(1,9)$ противоположной киральности. Чтобы связать их, необходимо дальнейшее расширение фазового пространства еще одной парой векторных переменных (C^μ, p_C^μ), на которые наложим связи

$$C^2 - 1 \approx 0, \qquad C\Lambda \approx 0, \qquad CD \approx 0, \qquad p_C^\mu \approx 0. \tag{16}$$

(Отметим, что для всех перечисленных выше конкретных моделей выполнено $\{D^2, C^\mu D_\mu\} \sim C^\mu D_\mu$, поэтому в расширенной с помощью (16) системе уравнение $D^2 \approx 0$ будет по-прежнему связью 1 рода.) Разделение связей по родам для совокупной системы (13) + (16) выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{llll} \Lambda^2 \approx 0, & p_\Lambda D \approx 0; & C^2 - 1 \approx 0, & p_C C \approx 0; \\ C\Lambda \approx 0, & p_C D \approx 0; & CD \approx 0, & p_C \Lambda \approx 0; \end{array} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{p}_\Lambda^\mu \equiv p_\Lambda^\mu - \frac{p_\Lambda D}{\Lambda D}\Lambda^\mu - (p_\Lambda C)C^\mu + \frac{1}{2\Lambda D} p_\chi \tilde{\Gamma}^\nu D_\nu \Gamma^\mu \chi \approx 0, \\ &\tilde{p}_C^\mu \equiv p_C^\mu - \frac{p_C D}{\Lambda D}\Lambda^\mu - (p_C C)C^\mu - \frac{p_C \Lambda}{\Lambda D} D^\mu \approx 0, \\ &\frac{p_C D}{\Lambda D} - p_\Lambda C + \frac{1}{2\Lambda D} p_\chi C_\nu \tilde{\Gamma}^\nu \Gamma^\mu D_\mu \chi \approx 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где C1P (18) – первой стадии приводимости. Соответствующие тождества, по модулю C2P (17), имеют вид $\Lambda\tilde{p}_\Lambda = C\tilde{p}_\Lambda = \Lambda\tilde{p}_C = D\tilde{p}_C = C\tilde{p}_C = 0$. Ковариантное квантование этого сектора (так же, как (3) или (10)) может быть выполнено по схеме, развитой в работах [8].

В результате в нашем распоряжении имеется обратимая матрица $C_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$, которую можно использовать для поднятия и опускания спинорных индексов. С ее помощью переходим от (14) к эквивалентным связям

$$p_{\chi\alpha}^{(2)} \equiv (C_\mu \Gamma^\mu D_\nu \tilde{\Gamma}^\nu p_\chi)_\alpha \approx 0, \tag{19}$$

которые уже можно ковариантно скомбинировать с уравнениями (15). Окончательно модифицированная формулировка, эквивалентная (11), (12), имеет вид

$$\begin{array}{lll} D^2 = 0, & \Lambda^2 = 0, & p_\Lambda^\mu = 0, \\ C^2 = 1, & C\Lambda = CD = 0, & p_C^\mu = 0; \end{array} \tag{20}$$

$$\Phi^\alpha \equiv L^{(1)\alpha} + \Lambda_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta} p_{\chi\beta} = 0, \tag{21}$$

$$G_\alpha \equiv \Lambda_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\chi^\beta + (C_\mu \Gamma^\mu D_\nu \tilde{\Gamma}^\nu p_\chi)_\alpha = 0, \tag{22}$$

где скобки Пуассона связей (22) есть $\{G_\alpha, G_\beta\} = -2(\Lambda D)C_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$.

В итоге задача квантования теории с бесконечно приводимыми связями первого рода сведена к квантованию системы, содержащей неприводимые связи первого рода (21) и отделенные от них неприводимые связи второго рода (22).

Сделаем два заключительных замечания.

а) Имея в распоряжении векторы D^μ, Λ^μ, подчиненные связям из (20), можно построить объекты

$$\Pi^\pm{}_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \frac{1}{2b}\Gamma^{\mu\nu} D_\mu \Lambda_\nu\Big)_\alpha{}^\beta, \qquad b \equiv \sqrt{(D\Lambda)^2 - D^2\Lambda^2},$$

являющиеся проекторами: $1 = \Pi^+ + \Pi^-$, $(\Pi^\pm)^2 = \Pi^\pm$, $\Pi^+\Pi^- = 0$. Последние могут быть использованы в изложенной выше конструкции вместо матриц $D_\mu\Gamma^\mu$, $\Lambda_\mu\Gamma^\mu$.

б) Для случая группы Лоренца $SO(1,8)$ имеется только одно неэквивалентное спинорное представление минимального веса (упомянутая выше матрица $z_{\alpha\beta}$ может быть использована для поднятия и опускания спинорных индексов). Это, в частности, означает, что для $D=9$ суперчастицы Зигеля нет необходимости в расширении фазового пространства векторными переменными Λ^μ, C^μ, что для этого случая может существенно упростить квантовую реализацию предложенной схемы.

---

1. M.B.Green and J.H.Schwarz, Phys. Lett. **B136**, 367 (1984).
2. L.Brink and J.H.Schwarz, Phys. Lett. **B100**, 310 (1981).
3. I.A.Batalin and I.V.Tyutin, Nucl. Phys. **B381**, 619 (1992); Phys. Lett. **B317**, 354 (1993); Mod. Phys. Lett. **A8**, 3757 (1993).
4. A.A.Deriglazov, A.V.Galajinsky, and S.L.Lyakhovich, HEP-TH/9512036, 21 p, submitted to Nucl. Phys. B.
5. J.M.Evans, Phys. Lett. **B233**, 307 (1989); Nucl. Phys. **B331**, 711 (1990).
6. L.Brink, M.Henneaux, and C.Teitelboim, Nucl. Phys. **B293**, 505 (1987).
7. M.B.Green and C.M.Hull, Nucl. Phys. **B344**, 115 (1990); Mod. Phys. Lett. **A5**, 1399 (1990).
8. I.A.Batalin and E.S.Fradkin, Preprint FIAN **259** (1982); Preprint FIAN **165**, (1983).
9. W.Siegel and Class. Quant. Grav. **2**, 95 (1985).
10. A.A.Deriglazov and A.V.Galajinsky, Mod. Phys. Lett. **A9**, 3445 (1994).
11. W.Siegel, Nucl. Phys. **B263**, 93 (1985).
12. Y.Eisenberg, Phys. Lett. **B276**, 325 (1992).