

## КВАЗИЧАСТИЦЫ В ТЕОРИИ ФЕРМИОННОЙ КОНДЕНСАЦИИ

В.А.Ходель<sup>1)</sup>, В.Р.Шагинян<sup>\*2)</sup>, П.Шук<sup>+3)</sup>Российский научный центр "Курчатовский институт"  
123182 Москва, Россия\*Петербургский институт ядерной физики РАН  
188350 Гатчина, Россия+Institut des Sciences Nucleaires  
F-38026 Grenoble Cedex, France

Поступила в редакцию 2 апреля 1996 г.

Показано, что в системах с фермионным конденсатом квазичастичный формализм Ландау продолжает работать. В случае конечной системы этот формализм пригоден для описания перестройки состояний у поверхности Ферми. В бесконечной системе он также имеет место, и представление о квазичастицах при низкой температуре, как о хорошо определенных возбуждениях у поверхности Ферми, сохраняется. При этом время жизни квазичастицы пропорционально температуре, а плотность состояний обратно пропорциональна температуре.

PACS: 71.10.-w

Несколько лет назад в работе [1] был найден новый класс решений уравнения теории ферми-жидкости [2]

$$\epsilon_p(n_p) - \mu - T \ln \frac{1 - n_p}{n_p} = 0 \quad (1)$$

для функции распределения  $n_p$  квазичастиц по импульсам  $p$ . В этом уравнении  $T$  – температура,  $\mu$  – химический потенциал,  $\epsilon_p = \delta E / \delta n_p$  – энергия квазичастицы, которая, как и полная энергия  $E$ , является функционалом от  $n_p$ . Обычное решение уравнения (1) получается, если принять, что вблизи поверхности Ферми  $\epsilon_p$  монотонно растет с  $p$ . Тогда при  $T = 0$  квазичастицы заполняют сферу Ферми того же радиуса,  $p_F = (3\pi^2 \rho)^{1/3}$  ( $\rho$  – плотность системы, а  $p_F$  – импульс Ферми), что и частицы идеального ферми-газа, и потому зависимость от  $T$  при малых  $T$  основных характеристик ферми-жидкости Ландау такая же, как в идеальном ферми-газе.

Новые решения уравнения (1) обладают совсем иными свойствами. Главное из них – непрерывность  $n_p$  в окрестности поверхности Ферми. Вследствие этого при  $T = 0$  член с логарифмом в (1) может быть опущен, и тогда в спектре  $\epsilon_p$  возникает плато:  $\epsilon_p = \mu$ . Квазичастицы этого плато были названы фермионным конденсатом. С математической точки зрения разница в свойствах решений обусловлена тем, где достигается минимум функционала  $E(n_p, T = 0)$ . Обычное заполнение реализуется в системах со слабыми или умеренными корреляциями. Тогда минимум  $E$  лежит на границе функционального пространства  $[n_p]$ , определяемой принципом Паули. Фермионный

---

<sup>1)</sup> e-mail: khodel@loyd.net.kiae.su

<sup>2)</sup> e-mail: vrshag@lnpi.spb.su

<sup>3)</sup> e-mail: schuck@frepn11.in2p3.fr

конденсат возникает, если корреляции столь мощны, что минимум  $E$  смещается внутрь. Это легко понять, если переписать полученное уравнение  $\epsilon_p = \mu$ , справедливое в однородной системе в интервале  $p_i < p < p_f$ , как условие минимума

$$\delta E / \delta n_p = \mu \quad (p_i < p < p_f). \quad (2)$$

Стоит отметить, что при  $T \neq 0$  плато перестает существовать, производная  $d\epsilon_p/dp$  становится положительной [3]. При малых  $T$  она пропорциональна  $T$ , и потому во многих отношениях система с фермионным конденсатом ведет себя как ферми-жидкость, у которой эффективная масса квазичастиц  $M^* \sim 1/T$ . Это обстоятельство будет использовано ниже при анализе столкновительно-го затухания квазичастичных возбуждений конденсатного состояния. В [3] для ширины  $\gamma(T)$  этих состояний в рамках теории возмущений было получено, что  $\gamma(T)$  расходится при малых  $T$  как  $1/T$ . Будь этот результат верен, термины квазичастиц оказались бы непригодными для описания новых решений уравнения (1). Однако на самом деле, как мы увидим, квазичастичный формализм продолжает работать, а вот теория возмущений, как это нередко с ней бывает, терпит фиаско за точкой фазового перехода. Чтобы доказать первую часть утверждения, проанализируем проблему новых решений в системе конечных размеров, где столкновительная ширина состояний, принадлежащих дискретному спектру, отсутствует вовсе. Рассмотрим в качестве примера сферическое атомное ядро с полностью замкнутыми оболочками, отделенными достаточно большим энергетическим "просветом" от незаполненных оболочек, и добавим к нему достаточно большое число частиц  $k$ , но малое по сравнению с массовым числом  $A$ . Тогда изменение энергии  $E$  системы дается формулой теории ферми-жидкости [2,4]

$$\delta E = \sum_{\lambda, \lambda_1} \left[ \epsilon_{\lambda}^m \delta n_{\lambda} \delta_{\lambda, \lambda_1} + \frac{1}{2} F_{\lambda, \lambda}^{\lambda_1, \lambda_1} \delta n_{\lambda} \delta n_{\lambda_1} \right]. \quad (3)$$

Входящие в (3) одночастичные энергии  $\epsilon_{\lambda}^m$  и матричные элементы эффективно-го взаимодействия  $F$  вычисляются в исходном ядре,  $\lambda = n, l, j, m$  – стандартный набор одночастичных квантовых чисел. В сферическом ядре уровни вырождены по магнитному квантовому числу  $m$ . Если уровень с полным моментом  $j$  заполнен, на нем находится  $(2j + 1)$  квазичастиц;  $\sum \delta n_{\lambda} = k$ .

Напомним, что обычно проблема заполнения одночастичных орбиталей решается так: основным объектом является то заполнение Хартри – Фока, которое обеспечивает минимум энергии  $E$ . Однако если уравнение (2) имеет решение, не противоречащее принципу Паули, оно дает более глубокий минимум, ибо теперь согласно (2) числа заполнения становятся варьируемыми параметрами, и таким образом решение задачи ищется на более широком, чем функции Хартри – Фока, классе функций. Особенно нагляден случай, когда в незаполненной оболочке всего два одночастичных уровня. Тогда  $E$  – функция всего двух переменных  $n_1 = \delta n_1(2j_1 + 1)$  и  $n_2 = \delta n_2(2j_2 + 1)$ , связанных условием  $n_1 + n_2 = k$ . Уравнение (2) записывается теперь так:

$$\frac{\delta E}{\delta n_1} + \frac{\delta E}{\delta n_2} \frac{\delta n_2}{\delta n_1} = 0.$$

Вводя одночастичные энергии в рассматриваемом ядре стандартным образом:

$$\epsilon_1 = \frac{\delta E}{\delta n_1} = \epsilon_1^m + F_{11}^{11} n_1 + F_{22}^{11} n_2$$

и

$$\varepsilon_2 = \delta E / \delta n_2 = \varepsilon_2^m + F_{11}^{22} n_1 + F_{22}^{22} n_2,$$

можно переписать уравнение минимума иначе:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad (4)$$

причем вторая вариация  $E$  должна быть положительна, что эквивалентно условию  $[F_{11}^{11} - 2F_{22}^{11} + F_{22}^{22}] > 0$ . Разница  $\Delta E$  между  $E_0$  и энергией Хартри – Фока отрицательна, если оба числа,

$$n_1 = \frac{\varepsilon_2^m - \varepsilon_1^m + (F_{22}^{22} - F_{11}^{22})k}{F_{11}^{11} - 2F_{22}^{11} + F_{22}^{22}}, \quad n_2 = \frac{\varepsilon_1^m - \varepsilon_2^m + (F_{11}^{11} - F_{11}^{22})k}{F_{11}^{11} - 2F_{22}^{11} + F_{22}^{22}}, \quad (5)$$

положительны и тогда

$$\Delta E = - \frac{[\varepsilon_1^m - \varepsilon_2^m + (F_{11}^{11} - F_{11}^{22})k]^2}{2[F_{11}^{11} - 2F_{22}^{11} + F_{22}^{22}]}.$$

Анализ легко обобщается на большее число уровней  $\varepsilon_\lambda^m$ , вовлекаемых в игру. Основная особенность получаемого решения: принудительное “схлопывание” всех расстояний между уровнями, оказывающимися на поверхности Ферми. Пример такого рода в макросистеме приведен в работе [5]. Из всего этого можно сделать вывод, что в системах, где температура  $T$  мала по сравнению с расстоянием между одночастичными уровнями и, следовательно, столкновительное затухание состояний дискретного спектра отсутствует, квазичастичный формализм вместе с уравнением (2) пригоден для описания перестройки состояний у поверхности Ферми. Стоит отметить, что нигде в анализе не предполагалось, что входные параметры малы, и если это так, то именно ферми-жидкостной подход [2], а вовсе не метод Хартри – Фока, является адекватным при рассмотрении фермионной конденсации. Кроме того, этот подход позволяет корректно учесть и вклад парных корреляций, если эффективное взаимодействие в канале частица – частица притягательно [1,3].

Обратимся теперь к макроскопическим системам, когда  $T$  превосходит расстояние между уровнями. Затухание низколежащих состояний в таком случае снова должно рассчитываться по формулам теории ферми-жидкости [6,7], а не в рамках теории возмущений. Главное отличие состоит в том, что ширина  $\gamma$  пропорциональна не квадрату потенциала взаимодействия  $V$ , а квадрату амплитуда рассеяния  $\Gamma$ . Разница между этими величинами в системах с конденсатом огромна и вызвана гигантской плотностью состояний у поверхности Ферми, которая пропорциональна интегралу:

$$\rho(\varepsilon) \sim \int \delta(\varepsilon - \varepsilon_p(T)) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (6)$$

Подставляя в это уравнение одночастичный спектр из (1), получаем оценку зависимости плотности состояний от температуры,

$$\rho(\varepsilon) \sim \frac{p_F^2}{T} \frac{n_p(1 - n_p)}{\frac{dn_p}{dp}} \Big|_{\varepsilon}. \quad (7)$$

Для оценки ширины  $\gamma(T)$  воспользуемся известной формулой теории ферми-жидкости [6]

$$\gamma \sim (M^*(T))^3 T^2 < W(p) >. \quad (8)$$

Здесь  $W(p) \sim |\Gamma(p)|^2$  является ядром интеграла столкновений. Эффективная масса  $M^*(T)$  появляется в (8) как мера плотности состояний, определяемой соотношением (7)

$$M^*(T) \sim p_F^2/T. \quad (9)$$

Амплитуда  $\Gamma$  связана с амплитудой Ландау  $f$  соотношением

$$\Gamma(q, \omega) = \frac{f(p_1, p_2)}{1 + f(p_1, p_2)\chi_L(q, \omega)}. \quad (10)$$

Здесь  $\chi_L$  — линейная функция отклика свободных квазичастиц, имеющих эффективную массу  $M^*$ , импульсы  $p_1$  и  $p_2$  лежат у поверхности Ферми, а  $q = p_1 - p_2$ ,

$$\begin{aligned} \chi_L(q, \omega) = \\ = \int n_k(1 - n_{k+q}) \left[ \frac{1}{\omega - (\epsilon(k+q) - \epsilon(k)) + i\delta} - \frac{1}{\omega + (\epsilon(k+q) - \epsilon(k)) + i\delta} \right] \frac{d^3k}{2\pi^3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для нас особенно важно, что в области  $\omega < qp_F/M^*$  (а именно такие переданные импульсы входят в интеграл столкновений) абсолютная величина  $\chi_L$ , будучи пропорциональной плотности состояний (7), весьма велика, что позволяет пренебречь единицей в знаменателе (10), и тогда столкновительный интеграл перестает зависеть от амплитуды  $f$ . В этом пределе мы получаем:  $|\Gamma|^2 \sim T^2$ , что после подстановки в формулу (8) дает оценку  $\gamma(T) \sim T^2 \cdot T^2 \cdot T^{-3} \sim T$ . Эта же оценка может быть получена и из формулы для ширины  $\gamma$ , относящейся к квазичастице с энергией  $\epsilon(p)$  и импульсом  $p > p_F$  [7]:

$$\gamma = 2\pi \int \|\Gamma(q, \omega)\|^2 n_{k,\sigma}(1 - n_{k+q,\sigma}) \delta(\omega_0 - \omega) \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^6}, \quad (12)$$

где  $q$  и  $\omega = \epsilon(k+q) - \epsilon(k)$  являются переданными импульсом и энергией, соответственно, а  $\omega_0 = \epsilon(p) - \epsilon(p-q) \sim T$  — уменьшение энергии рассматриваемой квазичастицы в результате процессов перерассеяния. Таким образом, квазичастица с энергией  $\epsilon(p)$  "распадается" на квазидырку  $\epsilon(k)$  и две квазичастицы  $\epsilon(p-q)$  и  $\epsilon(k+q)$ . Надо также иметь в виду, что переданный импульс  $q$  должен удовлетворять условию

$$p > |p - q| > p_F, \quad (13)$$

так как квазичастица теряет импульс и энергию. Из равенства (11) следует, что интегрирование по  $d^3k$  в формуле (12) приводит к мнимой части  $\chi_L$ :

$$\gamma = -2 \int \|\Gamma(q, \omega_0)\|^2 \text{Im} \chi_L(q, \omega_0) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (14)$$

Для оценки интеграла (14) в духе теории ферми-жидкости [6] возьмем квазищастичный спектр, определяемый эффективной массой  $M^*(T)$ , формула (9). Таким образом, в качестве мнимой части  $\chi_L$  можно взять следующее выражение [7]:

$$\text{Im} \chi_L(q, \omega) = -M^{*2} \omega / q\pi.$$

Оценим теперь величину интеграла в формуле (14). Условие (13) и интегрирование по углу между векторами  $p$  и  $q$  дает множитель  $(\varepsilon(p) - \mu)^2 \sim \sim T^2$ , а интегрирование по  $dq$ , распространяясь от нуля до  $2p_F$ , приводит к конечному результату. Учитывая это и соотношения (7), (9), мы получаем оценку:

$$\gamma(T) \sim \frac{T^2 T^2 T_f}{T^3 \varepsilon_f} = T \frac{T_f}{\varepsilon_f}. \quad (15)$$

Здесь  $\varepsilon_f$  – энергия Ферми, а  $T_f$  температура "ферми-конденсатного перехода", порядок величины которой определяется из условия, что плотность состояний, задаваемая формулой (7), сравнивается с плотностью состояний обычной ферми-жидкости. Таким образом, ширина  $\gamma(T)$  оказывается линейной функцией  $T$ , а время жизни квазичастиц при малых  $T$  большим, несмотря на огромную плотность состояний (7).

Здесь уместно сделать замечание. Из уравнения (2) следует, что основное состояние многократно вырождено. Вместе с тем, реальное взаимодействие всегда содержит притягивающие компоненты, что приведет к образованию куперовских пар частицами конденсата, и, соответственно, к снятию вырождения [1]. Таким образом, при температуре  $T$  ниже некоторой критической  $T_c$  в одночастичном спектре возбуждений есть щель, ширина  $\gamma$  конечна и вычисляется в соответствии с известными результатами. Очевидно, что формула (15) справедлива при  $T > T_c$  и в той области температур, где еще справедлива оценка (9).

В заключение мы можем сделать вывод, что привычная квазичастичная картина, характерная для теории ферми-жидкости Ландау, сохраняется и для систем с фермионным конденсатом. Мы также можем заключить, что рассмотренная модель системы с фермионным конденсатом может представлять хорошее приближение при изучении реальных сильнокоррелированных ферми-систем, для которых основные черты квазичастичной картины остаются в силе.

Мы благодарны А.А.Абрикосову, J.C.Campuzano, O.K.Andersen, J.W.Clark, A.I.Lichtenstein and P.Nozières за плодотворные дискуссии. Эта работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 95-0204481 и 96-0219292).

- 
1. В.А.Ходель, В.Р.Шагинян, Письма в ЖЭТФ **51**, 488 (1990).
  2. Л.Д.Ландау, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956); ЖЭТФ **35**, 97 (1958).
  3. P.Nozières, J. Phys. I France **2**, 443 (1992).
  4. А.Б.Мигдал, *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер*, М.: Наука, 1967.
  5. Y.Sun and G. Kirgzenow, Phys. Rev. Lett. **72**, 2450 (1994).
  6. И.М.Халатников, *Теория сверхтекучести*, М.: Наука, 1971.
  7. Д.Пайнс, Ф.Нозьер, *Теория квантовых жидкостей*, М.: Мир, 1967.