РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ | *ТОМ 63, ВЫПУСК 11*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД | *10 ИЮНЯ, 1996*

Письма в ЖЭТФ, том 63, вып.11, стр.833 - 836 © 1996г. 10 июня

СКАЛЯРНЫЙ ПРОПАГАТОР В ПОЛЕ ИНСТАНТОНА В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

А.А.Абрикосов (мл.)[1)]

Институт теоретической и экспериментальной физики
117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 марта 1996 г.
После переработки 5 мая 1996 г.

Рассмотрена скалярная материя в поле инстантона в замкнутом объеме. Найдено компактное выражение для точной функции Грина безмассовых скалярных частиц в фундаментальном представлении.

PACS: 02.30.Jr, 11.15.-q, 12.38.-t, 12.40.-y

1. Прошло уже 20 лет со времени открытия инстантонов [1, 2], но до сих пор не понятно, какова их роль в теории сильных взаимодействий. Инстантоны вступают в игру на масштабах, близких к конфайнменту, и их вклад зависит от физики на больших расстояниях.

Инстантоны нарушают киральную инвариантность и дают возможность красиво решить $U(1)$ проблему [3]. Была сделана попытка объяснить с помощью инстантонов сильное взаимодействие [4]. Предполагалось, что в квантовой хромодинамике (КХД) существуют две устойчивых фазы вакуума. Первая – это разреженный газ псевдочастиц вблизи от кварков. На достаточном удалении более выгодна вторая фаза, в результате чего кварки оказывались заключены внутри пузырька так же, как это было в модели мешков [5]. Именно такая физическая картина легла в основу настоящей работы.

Среди поводов, привлекающих внимание к инстантонам в настоящее время, можно назвать рост инстантонных вкладов в слабые и сильные процессы при высоких энергиях [6]. Инстантоны важны для электрослабых процессов с нарушением барионного числа [7], определяющих барионную асимметрию

[1)] e-mail: persik@vxitep.itep.ru

Вселенной. Отметим, что даже не будучи причиной конфайнмента, инстантоны, несомненно, важны для адронной физики [8].

2. При попытке включить инстантоны в модели конфайнмента, к примеру модель мешков [5], возникает вопрос о свойствах инстантонов в замкнутых областях. До настоящего времени влияние границ рассматривалось полукачественно.

В первую очередь имеют место деформации псевдочастиц и самого мешка. Оценить величину деформации можно по той доле действия инстантона, которая набиралась бы вне мешка. Пусть радиус инстантона ρ много меньше, чем радиус мешка R_B. Тогда деформации будут порядка $(\rho/R)^4 \ll 1$, и с точностью до $(\rho/R)^2$ ими можно пренебречь.

Во-вторых, изменяется спектр квантовых флуктуаций (эффект Казимира). Это ведет к замораживанию постоянной связи $\alpha(\rho)$ при $\rho \sim R_B$.

И, наконец, инстантоны взаимодействуют с материей, то есть с кварками. Поля материи в замкнутом пространстве квантованы, и через посредство материи псевдочастицы чувствуют границу. Это взаимодействие характеризуется соответствующими функциями Грина в поле инстантона. В настоящей работе мы обратимся к случаю скалярной материи в фундаментальном представлении. Как известно, другие пропагаторы могут быть выражены через данный [9].

Главная трудность заключается в том, что поле инстантона велико, и задача, в принципе, выходит за рамки теории возмущений. Однако для безмассовой частицы можно найти простое выражение для точной функции Грина.

3. Рассмотрим евклидовскую теорию поля с калибровочной группой $SU(2)$. Обозначим через A_μ^a вектор-потенциал и через $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \tau^a$ –напряженность калибровочного поля (τ^a означает матрицы Паули). Лагранжиан равен

$$L_g = \int d^4x \frac{\operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2}{8g^2} = \frac{1}{4g^2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2. \tag{1}$$

Уравнения движения имеют классическое инстантонное решение. В стандартной сингулярной калибровке поле инстантона радиуса ρ, расположенного в начале координат, есть

$$A_\mu^a = \frac{2\rho^2 \bar{\eta}_{\mu\nu}^a x_\nu}{x^2(x^2+\rho^2)} = -\bar{\eta}_{\mu\nu}^a \partial_\nu \log \Pi(x). \tag{2}$$

Здесь $\Pi(x) = 1 + \rho^2/x^2$ и $\eta_{\mu\nu}^a$, $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$ – самодуальный и антисамодуальный символы 'тХоофта [10]. Такой выбор позволяет легко сделать обобщение на $5N$-параметрическое многоинстантонное решение 'тХоофта [11] и тепловое решение (калорон) [12]. Удобно воспользоваться следующими обозначениями (латинские индексы выделяют три "пространственных" измерения):

$$\tau_\mu = (\tau_i, i); \qquad \tau_\mu^\dagger = (\tau_i, -i); \tag{3}$$

$$\tau_\mu^\dagger \tau_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}^a \tau_a; \qquad \tau_\mu \tau_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu} + i\bar{\eta}_{\mu\nu}^a \tau_a. \tag{4}$$

Отсюда легко вывести свойства η-символов. Свертки τ-матриц с 4-векторами мы будем обозначать "шляпками":

$$\hat{x} = x_\mu \tau_\mu; \qquad \hat{x}^\dagger = x_\mu \tau_\mu^\dagger. \tag{5}$$

4. Классическое поле инстантона не мало и не может рассматриваться по теории возмущений. Лагранжиан материи и уравнение на функцию Грина выглядят так:

$$L_m = -\int_{B_3} \phi^* \nabla_\mu^2 \phi \, d^3x; \qquad -\nabla_\mu^2 \Delta^I(x,y) = \mathcal{I}(x,y). \tag{6}$$

Ковариантная производная в фундаментальном представлении есть $\nabla_\mu = \partial_\mu - i\tau^a A_\mu^a/2$, а $\mathcal{I}$ – это единичный оператор. Имея в виду применение к модели мешков, будем предполагать, что B_3–это замкнутая 3-мерная область, которая "заметает" бесконечный цилиндр $B_3 \otimes R$ по четвертому (временному) измерению. Результаты также будут справедливы и для замкнутых 4-мерных областей.

Мы будем считать, что скалярное поле удовлетворяет линейному граничному условию Дирихле, то есть $\phi(x \in \partial B_3) = 0$. Для пропагатора это означает, что когда второй аргумент лежит на границе,

$$\Delta_B(x,y) = 0 \quad \text{для} \quad y \in \partial B_3 \quad \text{и} \quad \mathcal{I}(x,y) = 0 \quad \text{для} \quad x, y \in \partial B_3. \tag{7}$$

Ковариантный оператор д'Аламбера в поле недеформированного инстантона (2) можно привести к виду

$$\nabla_\mu^2 = \Pi^{1/2}(x) \hat\partial \frac{1}{\Pi(x)} \hat\partial^\dagger \Pi^{1/2}(x). \tag{8}$$

Легко видеть, что если $1/\partial^2$ – это функция Грина обыкновенного д'аламбертиана,

$$\partial_\mu^2 \frac{1}{\partial^2}(x,y) = \mathcal{I}(x,y), \tag{9}$$

то функция

$$\Delta^I(x,y) = -\Pi^{-1/2}(x) \left[\int d^4z \, \hat\partial \frac{1}{\partial^2}(x,z) \, \Pi(z) \, \hat\partial^\dagger \frac{1}{\partial^2}(z,y) \right] \Pi^{-1/2}(y) \tag{10}$$

удовлетворяет уравнению (6).

Подстановка свободного пропагатора в бесконечном пространстве,

$$\Delta_\infty^0 = -\frac{1}{\partial^2}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2 (x-y)^2}, \tag{11}$$

в уравнение (10) дает хорошо известное выражение [9]:

$$\Delta_\infty^I(x,y) = \Pi^{-1/2}(x) \frac{1 + \rho^2 (\hat x \hat y^\dagger / x^2 y^2)}{4\pi^2 (x-y)^2} \Pi^{-1/2}(y). \tag{12}$$

Достоинством формулы (10) является то, что в нее с тем же успехом можно подставлять свободные функции Грина Δ_B в замкнутых областях $B_3 \otimes R$ и B_4. Обратите внимание, что пропагатор в поле инстантона Δ_B^I, (10), удовлетворяет граничным условиям (7), если им удовлетворяет Δ_B^0. Помимо прочего, это условие устраняет поверхностные члены и делает операторы (к примеру, $i\partial$) эрмитовыми.

Этим завершается вывод формулы для скалярного пропагатора в поле инстантона в замкнутом объеме.

5. Мы построили функцию Грина скалярных частиц в фундаментальном представлении калибровочной группы $SU(2)$ в конечном объеме с учетом поля инстантона. В бесконечном пространстве функции Грина для частиц с высшими спинами могут быть выражены через Δ^I. Наш результат легко обобщить на высшие калибровочные группы, многоинстантонные решения и тепловые инстантоны.

В качестве следующего шага следовало бы исследовать спинорные кварки. Интересная проблема – это выживут ли фермионные нулевые моды при наложении граничных условий. Как известно, нулевые моды приводят к нарушению киральной инвариантности в самодуальных полях. В то же время, границы мешка могут явным образом нарушать киральную инвариантность, и два рода эффектов должны интерферировать.

В заключение я рад выразить признательность Э.В.Шуряку, беседы с которым явились поводом к началу работы.

---

1. A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwartz, and Yu.S.Tyupkin, Phys. Lett. **B59**, 85 (1975).
2. *Instantons in gauge theories*, Ed. M.A.Shifman, World Scientific, Singapore, 1994.
3. G.'tHooft, Phys. Repts. **142**, 357 (1986).
4. C.G.Callan, R.F.Dashen, and D.G.Gross, Phys. Rev. **D19**, 1826 (1979).
5. A.Chodos, R.L.Jaffe, C.B.Thorn, and V.F.Weisskopf, Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974).
6. A.Ringwald, Nucl. Phys. **B330**, 1 (1990).
7. L.McLerran, A.I.Vainshtein, and M.B.Voloshin, Phys. Rev. **D42**, 171 (1990).
8. E.V.Shuryak, Nucl. Phys. **B203**, 93, 116, 140 (1982).
9. L.S.Brown, R.D.Carlitz, D.B.Creamer, and Ch.Lee, Phys. Rev. **D17**, 1583 (1978).
10. G.'tHooft, Phys. Rev. **D14**, 3432 (1976).
11. R.Jackiw, C.Nohl, and C.Rebbi, Phys. Rev. **D15**, 1642 (1977).
12. B.J.Harrington and H.K.Sheppard, Phys. Rev. **D17**, 1583 (1978).