

## ФОРМИРОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОГО СЛОЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА ДВУХЧАСТОТНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В.В.Вечеславов

*Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН  
630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 12 мая 1996 г.

На примере маятника с двухчастотным возмущением детально обсуждается описанный в работе [3] новый эффект – появление низкочастотных вторичных гармоник в сепаратрисном отображении системы. Показано наличие областей параметров возмущения, где именно эти гармоники дают основной вклад в формирование хаотического слоя основного резонанса. Приводятся результаты сравнения аналитического и численного методов определения амплитуд вторичных гармоник.

PACS: 05.45.+b

Многие проблемы взаимодействия нелинейных резонансов и образования динамического хаоса в гамильтоновых системах приводят к необходимости исследования модели, которую можно интерпретировать как маятник (основной резонанс, вблизи которого выбираются начальные состояния системы), подверженный действию квазипериодического возмущения [1–3]:

$$H(x, p, t) = p^2/2 + \cos x + V(x, t), \quad (1)$$

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \cos(a_n x - \Omega_n t). \quad (2)$$

Амплитуды гармоник возмущения  $V(x, t)$  будем считать малыми,  $\epsilon_n \ll 1$ , а частоты (по отношению к принятой за единицу частоте малых колебаний маятника) высокими,  $\Omega_n \gg 1$ .

Известно, что под влиянием возмущения сепаратриса основного резонанса разрушается и на ее месте образуется неустойчивая область, получившая название хаотического слоя [4]. Знание полного размера этой области является весьма важным для приложений [1, 2]. Прямое измерение этой характеристики динамического хаоса может быть выполнено двумя способами.

Первый способ – численное интегрирование уравнений движения системы, находящейся внутри исследуемой части (вращение или колебание фазы) хаотического слоя, и отыскание минимального периода движения  $T_{min}$  (период движения  $T$  есть интервал времени между соседними моментами  $t_\pi$  прохождения устойчивой фазы  $x = \pi$ ). Ширина слоя определяется затем по соотношению  $\omega_s(T_{min}) = 32 \exp(-T_{min})$  [1]; здесь и далее  $\omega = (p^2/2 + \cos x - 1)$  – безразмерное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии.

Второй способ – исследование отвечающего за формирование слоя так называемого "сепаратрисного отображения". Это отображение, введенное в работе [4], приближенно описывает динамическое состояние движущейся вблизи сепаратрисы основного резонанса системы в моменты прохождения ею положения устойчивого равновесия и для многочастотного ( $N > 1$ ) возмущения (2) может

быть записано в виде [1]

$$\bar{w} = w + \sum_{l=1}^L W_l \sin(\Omega_l t_\pi), \quad \bar{t}_\pi = t_\pi + \ln \frac{32}{|\bar{w}|}, \quad (3)$$

где  $t_\pi$  – моменты прохождения системой положения устойчивого равновесия  $x = \pi$ . Ширина слоя  $w_s \approx w_{max}$  определяется максимальным отклонением от невозмущенной сепаратрисы по энергии в процессе итераций отображения (3). Второй способ приводит к желаемому результату значительно (как правило, в сотни раз) быстрее по сравнению с вычислением периодов движения, но для его реализации необходимо уметь вычислять амплитуды всех существенных гармоник сепаратрисного отображения квазипериодической гамильтоновой системы. На этом пути возникли неожиданные трудности: оказалось (подробности в [3]), что для многочастотного ( $N > 1$ ) возмущения (2) механизм формирования хаотического слоя качественно отличается от хорошо изученного к настоящему времени механизма для одной частоты [1]. В спектре отображения (3) в общем случае присутствуют не только все первичные (явно содержащиеся в гамильтониане  $H(x, p, t)$ ) частоты, но и их комбинации, и всегда имеет место неравенство  $L > N$  [3]. Гармоники комбинационных частот появляются во всех порядках по малому параметру возмущения, начиная со второго. Их необходимо учитывать, поскольку в силу экспоненциальной зависимости от частоты даже очень слабые, но низкочастотные возмущения могут играть в образовании динамического хаоса главную роль и фактически полностью определять формирование хаотического слоя (см. ниже).

С вычислением вкладов в сепаратрисное отображение (3) от первичных гармоник (2) проблем не возникает, поскольку их амплитуды  $\epsilon_n$  и частоты  $\Omega_n$  заданы. Напомним, что возмущение вида  $V(x, t) = \epsilon \cos(mx/2 - \Omega t)$  ( $m$  – параметр) порождает в сепаратрисном отображении (3) гармонику той же частоты  $\Omega$  с амплитудой

$$W_{MA}(\Omega > 0) = \epsilon \Omega A_m(\Omega), \quad W_{MA}(\Omega < 0) = W_{MA}(|\Omega|) (-1)^m e^{-\pi|\Omega|}, \quad (4)$$

где  $A_m(\Omega)$  – интеграл Мельникова–Арнольда [1]. Если возмущение не содержит других частот, то теоретическая ширина хаотического слоя определяется простым соотношением:

$$w_{st} \approx \Omega |W_{MA}(\Omega)| \left( 1 + \frac{4\xi}{\Omega} \right), \quad (5)$$

где параметр  $0 \leq \xi \leq 1$  зависит от конкретных условий перекрытия резонансов на краю слоя. Из формулы (5) следует, что ее практическое применение ограничено дополнительным условием  $|\Omega| \gg 1$ , и мы будем использовать ее в основном для оценок по порядку величины, принимая  $\xi = 0.5$ .

Положение с комбинационными гармониками возмущения осложняется тем, что их амплитуды заранее неизвестны. Строгая теория здесь пока отсутствует, однако общий подход к проблеме и приближенные аналитические соотношения для определения амплитуд вторичных (возникающих во втором порядке) комбинационных гармоник предложены недавно в работе [3]. Ниже приводятся результаты численной проверки этих соотношений и следствий из них.

Мы ограничимся самым простым нетривиальным случаем двухчастотного возмущения, рассмотрение которого выявляет основные черты, характерные для проблемы в целом.

Допустим, что возмущение системы (1) содержит две высокочастотные первичные гармоники

$$V(x, t) = \epsilon_1 \cos(x - \Omega_1 t) + \epsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t) \quad (6)$$

и введем обозначения:

$$\Delta\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Delta\Omega_- = \Omega_2 - \Omega_1.$$

Из результатов работы [3] следует, что в возмущении появятся вторичные гармоники с частотами  $\Delta\Omega_+$ ,  $\Delta\Omega_-$ , и мы рассмотрим каждую из них в предположении, что система движется в верхней ( $p > 0$ ) части хаотического слоя в режиме вращения фазы.

*Вторичная гармоника возмущения на сумме частот имеет вид*

$$\epsilon_+ \cos(2x - \Delta\Omega_+ t), \quad \epsilon_+ = -\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2} \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right]. \quad (7)$$

Она порождает в сепаратрисном отображении (3) гармонику той же частоты  $\Delta\Omega_+$  с амплитудой (4):

$$W_+(\Delta\Omega_+ > 0) = \frac{4\pi}{3} a_+ \epsilon_1 \epsilon_2 \left[ \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \frac{e^{\pi \Delta\Omega_+ / 2}}{\sinh(\pi \Delta\Omega_+)} \Delta\Omega_+^2 (\Delta\Omega_+^2 - 2), \quad (8)$$

$$W_+(\Delta\Omega_+ < 0) = W_+(|\Delta\Omega_+|) e^{-\pi |\Delta\Omega_+|}.$$

Учитывая приближенный характер этой формулы, мы ввели в нее дополнительный множитель  $a_+$ , который определяется подгонкой методом наименьших квадратов к результатам численного счета.

Соотношение (8) проверялось путем численного построения сепаратрисного отображения (3) системы (1), (6) в довольно широком диапазоне параметров возмущения (метод счета описан в [3]), и на рис.1 представлены основные результаты. Видно, что формула (8) отлично передает качественное поведение вторичной гармоники на сумме частот, хотя природа подгоночного множителя  $a_+$  неясна. Сравнивая амплитуду этой гармоники с найденной по формуле (4) амплитудой  $W_{MA}(\Delta\Omega_1)$ , главной первичной гармоники возмущения, можно найти области параметров, где  $W_+(\Delta\Omega_+) \gg W_{MA}(\Omega_1)$  и где именно вторичная гармоника, являясь единственной существенной компонентой сепаратрисного отображения (3), полностью отвечает за формирование хаотического слоя. В частности, для параметров рис.1 имеются две такие области, задаваемые неравенствами  $0.3 \lesssim \Delta\Omega_+ \lesssim 1.3$  и  $\Delta\Omega_+ \gtrsim 1.6$ .

Для выяснения деталей рассмотрим подробнее конкретную ситуацию со следующим набором параметров возмущения (6):

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.075, \quad \Omega_1 = 13.0, \quad \Omega_2 = -10.0. \quad (9)$$

Численное интегрирование системы (1), (6), (9) и спектральный анализ показали, что амплитуда вторичной гармоники сепаратрисного отображения частоты

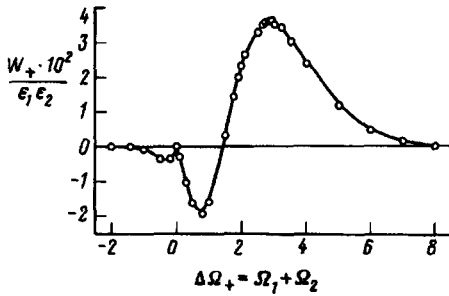


Рис.1. Приведенная амплитуда вторичной гармоники частоты  $\Delta\Omega_+$  сепаратрисного отображения (3). Возмущение имеет вид (6) с параметрами:  $\Omega_1 = \text{var}$ ;  $\Omega_2 = -10.0 = \text{const}$ ;  $0.01 \leq \epsilon_1 = \epsilon_2 \leq 0.5$ . Кружками представлены результаты численного интегрирования системы (1) при движении в верхней ( $p > 0$ ) части хаотического слоя в режиме вращения фазы. Сплошная линия построена по формуле (8) при значении подгоночного множителя  $\alpha_+ = 0.473$

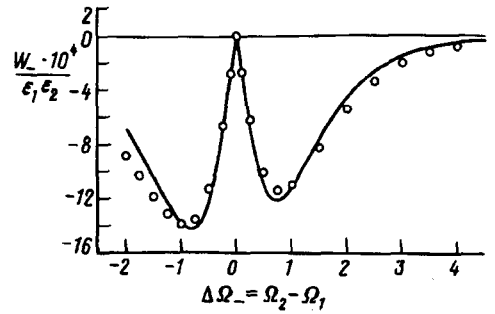


Рис.2. Приведенная амплитуда вторичной гармоники частоты  $\Delta\Omega_-$  сепаратрисного отображения (3). Возмущение имеет вид (6) с параметрами:  $\Omega_1 = 14.0 = \text{const}$ ;  $\Omega_2 = \text{var}$ ;  $0.01 \leq \epsilon_1 = \epsilon_2 \leq 0.5$ . Кружками представлены результаты численного интегрирования системы (1) при движении в верхней ( $p > 0$ ) части хаотического слоя в режиме вращения фазы. Сплошная линия построена по формуле (13) при значении подгоночного множителя  $\alpha_- = 1.35$

$\Delta\Omega_+ = 3.0$  равна  $W_+(3.0) \approx 2.01 \cdot 10^{-4}$  (см. рис.1), в то время как вклад от гармоник первичных частот составил менее четверти процента этой величины (теоретические амплитуды (4) первичных гармоник в исследуемой части слоя  $W_{MA}(13.0) \approx 4.31 \cdot 10^{-7}$  и  $W_{MA}(-10.0) \approx -6.45 \cdot 10^{-19}$ ). Таким образом, гамильтоновой системе (1), (6), (9) отвечает практически одночастотное сепаратрисное отображение вида

$$\bar{w} = w + W_+ \sin(\tau_\pi), \quad \bar{\tau}_\pi = \tau_\pi + \Delta\Omega_+ \ln \frac{32}{|\bar{w}|}, \quad W_+ = 2.01 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta\Omega_+ = 3.0, \quad (10)$$

где введена новая переменная  $\tau_\pi = \Delta\Omega_+ t_\pi \text{ mod}(2\pi)$ .

Мы столкнулись с одной из ситуаций, которая может возникнуть только для многочастотного  $N > 1$  возмущения (2): непрерывная гамильтонова система (1), (6), (9) не содержит в явном виде частоту  $\Delta\Omega_+ = 3.0$ , а в отвечающем этой системе сепаратрисном отображении (10) фактически отсутствуют гармоники первичных частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_1$  (они породили мощную вторичную гармонику, и на этом их участие в формировании хаоса закончилось). Спектры этих конструкций совершенно различны и тем не менее они правильно определяют главную характеристику исследуемой части хаотического слоя – его ширину.

В этом примере хаос образуется так, как будто бы первичных гармоник вообще нет, а есть одна вторичная. Что произойдет, если мы на самом деле заменим исходное двухчастотное возмущение (6), (9) на одночастотное с параметрами вторичной гармоники? Для ответа рассмотрим вновь систему (1) с возмущением точно того вида (7), какой имеет вторичная гармоника:

$$V(x, t) = \epsilon \cos(2x - \Omega t), \quad \epsilon = 2.11 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega = \Delta\Omega_+ = 3.0. \quad (11)$$

Амплитуда возмущения  $\epsilon$  в (11) с помощью формулы (4) подобрана так, чтобы движение системы (1), (11) в верхней вращательной части хаотического слоя описывалось тем же самым сепаратрисным отображением (10).

Таким образом, имеются две различные гамильтоновы системы (1), (6), (9) и (1), (11), которым отвечает одно и то же сепаратрисное отображение (10). Определение ширины слоя по минимальному периоду дает для обеих систем одно и то же значение  $w_s(T_{min}) \approx 1.30 \cdot 10^{-3}$ , что разумно согласуется с величиной  $w_s \approx w_{max} \approx 1.45 \cdot 10^{-3}$ , найденной итерациями общего для них отображения (10). Поскольку обе системы формируют вращательные сверху ( $p > 0$ ) части слоя одинаковой ширины, то в этом смысле их следует признать эквивалентными, хотя в любой другой области фазового пространства (и в других частях слоя) эти две динамические модели могут не иметь ничего общего. Наличие этой эквивалентности и доказывает, на наш взгляд, что вторичные (а в общем случае и более высокие комбинационные) гармоники – реальные объекты, активно участвующие в образовании динамического хаоса.

На разности частот возникают две симметричных вторичных гармоники:

$$\epsilon_- [\cos(x - \Delta\Omega_- t) - \cos(x + \Delta\Omega_- t)], \quad \epsilon_- = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{4} \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right|. \quad (12)$$

Они порождают в сепаратрисном отображении (3) гармонику частоты  $\Delta\Omega_-$  с амплитудой

$$\begin{aligned} W_-(\Delta\Omega_-) &= -\pi a_- \epsilon_1 \epsilon_2 \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right| \frac{e^{\pi|\Delta\Omega_-|/2}}{\sinh(\pi|\Delta\Omega_-|)} (1 - e^{-\pi|\Delta\Omega_-|}) = \\ &= -\frac{\pi a_- \epsilon_1 \epsilon_2}{\cosh(\pi\Delta\Omega_-/2)} \left| \left[ \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right] \right|. \end{aligned} \quad (13)$$

В эту формулу мы также ввели подгоночный множитель  $a_-$ . Результаты численного счета и их сравнение с формулой (13) даны на рис.2. Качественное поведение передано хуже, чем для случая суммы частот, но и здесь можно выделить область  $W_-(\Delta\Omega_-) \gg W_{MA}(\Omega_1), W_{MA}(\Omega_2)$ , где вторичная гармоника полностью определяет размер хаотического слоя. Для параметров рис.2 эта область определяется неравенством  $\Delta\Omega_- \gtrsim 0.5$ .

Из рассмотренных выше ситуаций может возникнуть впечатление, что комбинационные частоты работают только на усиление хаоса. Наш последний пример показывает, что это не так. Пусть возмущение (2) системы (1) содержит единственную гармонику:

$$V(x, t) = \epsilon_1 \cos(2x - \Omega_1 t), \quad \epsilon_1 = 2.0 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_1 = 4.0. \quad (14)$$

Применение формул (4), (5) дает для амплитуды сепаратрисной гармоники и ширины исследуемой части (вращение фазы при  $p > 0$ ) хаотического слоя значения  $W_{MA}(4.0) = 1.402 \cdot 10^{-4}$  и  $w_{st} = 8.43 \cdot 10^{-4}$ , соответственно, что вполне согласуется с результатами численного счета  $W(4.0) = 1.404 \cdot 10^{-4}$  и  $w_s = 8.62 \cdot 10^{-4}$ . Добавим к возмущению (14) еще две гармоники, после чего оно примет вид

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \epsilon_1 \cos(2x - \Omega_1 t) + \epsilon_2 \cos(x - \Omega_2 t) + \epsilon_3 \cos(x - \Omega_3 t), \\ \epsilon_1 &= 2.0 \cdot 10^{-5}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.075549, \quad \Omega_1 = 4.0, \quad \Omega_2 = 14.0, \quad \Omega_3 = -10.0. \end{aligned} \quad (15)$$

Если вновь использовать формулу (4) в отношении каждого из слагаемых (15), то никаких серьезных изменений в сепаратрисном отображении по сравнению со случаем (14) не предвидится, поскольку собственные вклады от добавленных гармоник  $W_{MA}(14.0) = 1.047 \cdot 10^{-7}$  и  $W_{MA}(-10.0) = -6.49 \cdot 10^{-19}$  на фоне амплитуды первой гармоники  $W(4.0) = 1.404 \cdot 10^{-4}$  пренебрежимо малы. Этот прогноз кардинально противоречит результатам численного счета, согласно которому сепаратрисное отображение, хотя и осталось по-прежнему одночастотным, перестроилось на совершенно другую частоту,  $\Omega_2 = 14.0$ . Измеренные значения амплитуды  $W(14.0) = 1.046 \cdot 10^{-7}$  и ширины слоя  $w_s = 1.47 \cdot 10^{-6}$  упали почти на три порядка, но хорошо согласуются с теоретическими значениями  $W_{MA}(14.0) = 1.047 \cdot 10^{-7}$  и  $w_{st} = 1.67 \cdot 10^{-6}$  одночастотной теории.

Объяснение этого эффекта простое: используя соотношения (4), (7), (8), мы настроили параметры второго и третьего слагаемых в (15) так, чтобы возникающая на сумме их частот  $\Delta\Omega = \Omega_2 + \Omega_3 = \Omega_1$  вторичная гармоника полностью "убила" первичное (на первый взгляд – главное) возмущение частоты  $\Omega_1$ . В результате основная роль в формировании исследуемой части хаотического слоя досталась второй (на первый взгляд – несущественной) гармонике возмущения самой высокой частоты  $\Omega_2 = 14.0$ .

Автор благодарен Б.В.Чирикову за обсуждения и советы. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-01047).

- 
1. B.V.Chirikov, *Phys. Reports* **52**, 263 (1979).
  2. А.Лихтенберг, М.Либман, *Регулярная и стохастическая динамика*, М.: Мир, 1984.
  3. В.В.Вечеславов, *ЖЭТФ* **109**(5), (1996), в печати.
  4. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко, *ЖЭТФ* **54**, 1590 (1968).