*Письма в ЖЭТФ, том 42, вып. 3, стр. 124 – 127* *10 августа 1985 г.*

# МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ДЕ-СИТТЕРОВСКИЕ (ИНФЛЯЦИОННЫЕ) СТАДИИ И ГЕНЕРАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

*А.А.Старобинский*

Получены общие формулы, дающие степень расширения Вселенной и амплитуду адиабатических возмущений, генерируемых из квантовых флуктуаций, на де-ситтеровской (инфляционной) стадии, созданной совместным действием произвольного числа скалярных полей с различными потенциалами и квантово-гравитационной поправки к лагранжиану $\propto R^2$.

Известно, что стадия экспоненциального расширения в ранней Вселенной (называемая де-ситтеровской (ДС) или инфляционной) может создаваться следующими причинами: квадратичными по тензору кривизны квантовыми поправками к уравнениям гравитационного поля [1] и различными скалярными полями, причем во втором случае возможны ситуации как с фазовым переходом [2,3], так и без него [4]. Число скалярных полей в современных суперсимметричных и супергравитационных теориях велико, а их потенциалы взаимодействия могут быть в достаточной степени произвольными. Поэтому естественно возникает задача об исследовании ДС-стадии, создаваемой совместным действием нескольких скалярных полей с различными потенциалами и квантово-гравитационных эффектов. Такую ДС-стадию мы будем называть многокомпонентной. Простейший вариант этой задачи (одно скалярное поле и квантовая поправка $\propto R^2$, где $R$ – след тензора Риччи) был рассмотрен в [5]. В настоящей работе получены общие формулы, описывающие ДС-стадию в случае произвольного числа скалярных полей, взаимодействующих между собой только гравитационно (так что плотность потенциальной энергии $V = \sum_n V_n(\Phi_n)$, $n$ – номер поля), и квантовой поправки $\propto R^2$. Негравитационным взаимодействием скалярных полей друг с другом мы пренебрегаем. С одной стороны, такое приближение разумно, так как из условия, чтобы на ДС-стадии не генерировались слишком большие возмущения (отклонения от однородности и изотропии), вытекает, что последнее взаимодействие не может быть существенно сильнее гравитационного; с другой стороны, окончательные результаты при этом приобретают особенно простой и красивый вид.

Лагранжиан рассматриваемой инфляционной модели есть

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\left(-R + \frac{R^2}{6M^2}\right) + \sum_n \left(\frac{1}{2}\,\Phi_{n,\mu}\,\Phi_n{}^{,\mu} - V_n(\Phi_n)\right). \qquad (1)$$

Пусть $a(t)$ – масштабный фактор плоской модели Фридмана (пространственной кривизной вскоре после начала ДС-стадии можно пренебречь); $H \equiv \dot{a}/a$. С точки зрения практической космологии (если не касаться вопросов о величине $n_B/n_\gamma$ и о некоторых экзотических элементарных частицах типа монополей), полная информация, которую нам нужно знать о де-ситтеровской стадии и которую должна дать теория этой стадии, заключается в: а) величине расширения Вселенной за время ДС-стадии $I = a_1/a_0$, где $a_0$ и $a_1$ – значения $a(t)$ в начале ($t = t_0$) и конце ($t = t_1$) стадии соответственно, и б) спектре и амплитуде скалярных возмущений и гравитационных волн, генерируемых из вакуумных квантовых флуктуаций в течение ДС-стадии.

Для расчета $I$ рассмотрим однородную эволюцию: $\Phi_n = \Phi_n(t)$. Будем для простоты считать вначале, что квантово-гравитационной поправки нет ($M = \infty$). На квази-де-ситтеровской стадии ($|\dot{H}| \ll H^2$) уравнения упрощаются:

$$3H^2 = 8\pi G \sum_n{}' V_n(\Phi_n), \quad \dot{H} = -4\pi G \sum_n \dot{\Phi}_n^2,$$
$$3H\dot{\Phi}_n + \frac{dV_n}{d\Phi_n} = 0, \tag{2}$$

где штрих над знаком суммы означает, что в эту сумму входят только те поля, для которых выполняется условие $|\dot{\Phi}_n| \ll H\Phi_n$ (последнее уравнение в (2) также относится только к таким полям). Система (2) имеет следующий частный интеграл:

$$\ln\frac{a(t)}{a_0} = \int_{t_0}^{t} H dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{H} H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_n{}' \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{H} V_n(\Phi_n) = -8\pi G \sum_n{}' \int_{\Phi_{n0}}^{\Phi_n} \frac{V_n(\Phi_n) d\Phi_n}{dV_n/d\Phi_n} \tag{3}$$

(на последнем шаге мы заменили $dt/H$ на $(-3d\Phi_n / \frac{dV_n}{d\Phi_n})$ в каждом слагаемом). Правая часть (3) есть сумма членов, каждый из которых зависит только от одного скалярного поля $\Phi_n$. Аналогично, при $M < \infty$ получаем:

$$\ln\frac{a(t)}{a_0} = -8\pi G \sum_n{}' \int_{\Phi_{n0}}^{\Phi_n} \frac{V_n(\Phi_n)\, d\Phi_n}{dV_n/d\Phi_n} + \frac{3}{M^2}(H_0^2 - H^2). \tag{4}$$

Сравнивая выражения, стоящие в правой части (4), с теми, которые были получены в [4,6] для инфляционных сценариев, в которых ДС-стадия создавалась одним скалярным полем или только квантово-гравитационными поправками, мы приходим к первому правилу многокомпонентной инфляции:

$$I \equiv a_1/a_0 = \prod_{p=1}^{n+1} I_p. \tag{5}$$

Величина расширения Вселенной за время многокомпонентной ДС-стадии равна формальному произведению соответствующих величин для ДС-стадий, создаваемых каждой компонентной в отсутствие остальных.

Влияние компонент друг на друга в (5) проявляется лишь неявно, через взаимозависимость величин $\Phi_n(t_1)$ и $H(t_1)$.

Спектр гравитационных волн, генерируемых на многокомпонентной ДС-стадии, такой же, как и в однокомпонентном случае, и при $k \ll aH$ дается формулой, следующей из [7]:

$$h_l^m = -\frac{\delta g_{lm}}{a^2(t)} = (2\pi)^{-3/2} \sum_j \int d^3k e_l^m \exp(i\,\mathbf{kr})\, h_g(k) c_g(\mathbf{k}, j); \tag{6}$$

$$l, m = 1, 2, 3; \quad \langle c_g (\mathbf{k}, j) \rangle = 0; \langle c_g (\mathbf{k}, j), c_g (\mathbf{k}', j') \rangle = \delta^{(3)} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{jj'};$$

$$h_g (k) = k^{-3/2} (16\pi G H^2 (t_k))^{1/2} (1 + 4H^2 (t_k) / M^2)^{-1/2},$$

где $e_l^m$ – поляризационный тензор, $e_{lm} e^{lm} = 1$ для каждого состояния поляризации, обозначаемого индексом $j = 1, 2$; $k = |\mathbf{k}|$; $c_g (k, j)$ – гауссовы случайные величины, а величина $t_k$ определяется из уравнения $k = a(t) H(t)$ на ДС-стадии. $H(t_k)$ слабо (в типичном случае – логарифмически) зависит от $k$, так что спектр (6) – приближенно плоский (строго плоский при $H \gg M$).

В общем случае при $k \ll aH$ система (1) имеет $n+1$ непадающих мод скалярных возмущений (и столько же падающих). Из них наиболее важной является непадающая адиабатическая мода. Соответствующую возмущенную метрику после конца ДС-стадии при $k \ll aH$ с помощью калибровочного преобразования всегда можно представить в диагональном виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2 (t) (1 + h(\mathbf{r})) dl^2 + O((k/aH)^2); \tag{7}$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

При этом на пылевой стадии ($a(t) \propto t^{2/3}$) возмущение плотности вещества $\delta\rho/\rho = -\eta^2 \Delta h / 20 = -9t^2 \Delta h / 20a^2$.

Для остальных мод (изоэнергетических) в главном по $k/aH$ порядке возмущения метрики и полной плотности энергии вещества и негравитационных полей обращаются в нуль. Возникшая на ДС-стадии непадающая адиабатическая мода всегда доживает до наших дней (независимо от физики промежуточных этапов расширения Вселенной от планковских до современных кривизн) в силу принципа причинности. Для выживания изоэнергетических возмущений необходимы специальные условия (например, чтобы одна из компонент не смешивалась после ДС-стадии с другими и сохранялась бы до настоящего времени; в частности это могут быть аксионы). Здесь мы ограничимся только адиабатической модой; обсуждение изоэнергетических мод см. в [8].

Наиболее простой (и вместе с тем общий) способ получения выражения для $h(\mathbf{r})$ – использование метода, примененного при выводе формулы (17) в [9]. В синхронной системе отсчета при $k \ll aH$ в главном приближении возмущенная метрика сохраняет диагональный вид, причем величины $H$, $t_0$, $t_1$ и $I$ становятся функциями $\mathbf{r}$. На ДС-стадии

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2 \exp\left(2 \int_{t_0}^{t} H dt\right) dl^2 , \tag{8}$$

а после ее конца

$$ds^2 = dt^2 - \exp\left(2 \int_{t_0}^{t_1} H dt\right) a^2 (t - t_1) dl^2 . \tag{9}$$

Сравнивая (7) и (9) при $t \gg t_1(\mathbf{r})$, находим:

$$h(\mathbf{r}) = 2\, \delta \ln I(\mathbf{r}) = 2 \left( \sum_n \frac{\delta \ln I}{\delta \Phi_{n0}} \delta \Phi_n (\mathbf{r}) + \frac{\delta \ln I}{\delta R_0} \delta R (\mathbf{r}) \right). \tag{10}$$

Из (2) и (3) видно, что в случае одного скалярного поля (10) переходит в формулу $h = -2H\delta\Phi / \dot{\Phi}$, которая ранее применялась в [9,10]. Переходя в фурье-представление и используя известные значения вакуумных квантовых флуктуаций $\delta\Phi_n (\mathbf{k})$ и $\delta R (\mathbf{k})$ на ДС-стадии, получаем:

$$h(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 k \exp(i \mathbf{k}\mathbf{r}) h(\mathbf{k}); \tag{11}$$

$$h(\mathbf{k}) k^{3/2} = \left(8\pi G \sqrt{2} \sum_n{}' \frac{V_n}{dV_n / d\Phi_n} H c_{an} (\mathbf{k}) + (24\pi G M^2)^{1/2} \frac{H^2}{M^2} c_{a, n+1} (\mathbf{k})\right)\Big|_{t = t_k} ;$$

$$\langle c_{ap}(\mathbf{k})\rangle = 0;\ \langle c_{ap}(\mathbf{k}),\, c_{ap'}(\mathbf{k}')\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta_{pp'};\ p = 1\ldots n+1,$$

где $c_{ap}(\mathbf{k})$ – независимые гауссовы случайные величины. Первая часть (11) слабо зависит от $k$, так что спектр – приближенно плоский. Из (10), (11) вытекает второе правило многокомпонентной инфляции:

$$h(\mathbf{r}) = \sum_p h_p(\mathbf{r});\ \langle h^2\rangle = \sum_p \langle h_p^2\rangle. \tag{12}$$

Величина непадающей адиабатической моды, генерируемой на многокомпонентной ДС-стадии, равна формальной сумме соответствующих величин для ДС-стадий, создаваемых каждой компонентной в отсутствие остальных.

### Литература


1. *Starobinsky A.A.* Phys. Lett., 1980, **91B**, 99.
2. *Guth A.H.* Phys. Rev., D, 1981, **23**, 347.
3. *Linde A.D.* Phys. Lett., 1982, **108B**, 389.
4. *Линде А.Д.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **38**, 149.
5. *Kofman L.A., Linde A.D., Starobinsky A.A.* Phys. Lett. B, 1985, to be published.
6. *Старобинский А.А.* Письма в Астрон. ж., 1983, **9**, 579.
7. *Старобинский А.А.* Письма в ЖЭТФ, 1979, **30**, 719; Сб.: Квантовая гравитация. Труды второго семинара "Квантовая теория гравитации". М.: ИЯИ, 1982, с. 58.
8. *Линде А.Д.* Письма в ЖЭТФ, 1984, **40**, 496.
9. *Starobinsky A.A.* Phys. Lett., 1982, **117B**, 175.
10. *Hawking S.W.* Phys. Lett., 1982, **115B**, 295; *Guth A.H., Pi S.Y.* Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, 1110; *Bardeen J., Steinhardt P.J., Turner M.S.* Phys. Rev. D, 1983, **28**, 679.



Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР



Поступила в редакцию
24 июня 1985 г