

## МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ И ФРАКТАЛЫ

*М.В.Энтин<sup>1)</sup>, Г.М.Энтин*

*Институт физики полупроводников СО РАН  
630090 Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный университет  
630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 15 августа 1996 г.

Рассматриваются свойства преобразования подобия в теории протекания в комплексной плоскости вероятности протекания. Показано, что задача о протекании на двумерной квадратной решетке сводится к преобразованию Мандельброта, приводящему к фрактальному поведению вероятности протекания в комплексной плоскости. Изучаются иерархические цепочки импедансов, сводящиеся к нелинейному отображению пространства импеданса самого на себя. Бесконечное продолжение процедуры приводит к фиксированной точке. Показано, что число шагов для достижения окрестности этой точки распределено фрактально.

PACS: 72.60.+g

В теории перколяции используется подход, основанный на иерархической цепочке сопротивлений для вычисления порога перколяции и поведения системы вблизи порога перколяции. Он базируется на рекуррентном соотношении для вероятности перколяции среды  $p$  [1] либо для сопротивлений иерархически построенного кластера (см., например, [2]).

Простейшая модель масштабного преобразования для геометрической перколяции использует вычисление вероятности протекания  $d$ -мерного куба со стороной  $2a$  при известной вероятности протекания куба  $a$ . Если не учитывать протекания между диагонально расположенными проводящими кубами, ренормгрупповое соотношение для вероятности перколяции на  $n$ -ом уровне имеет вид [1]

$$p_n = 1 - (1 - p_{p-1}^2)^{2^{d-1}}. \quad (1)$$

Отображение (1) является частным случаем более общих постановок ренормгруппового изучения перколяционных переходов. Целью настоящей заметки является исследование отображения (1) в комплексной плоскости  $p$ . Это отображение является нелинейным и его общие свойства описываются теорией фракталов [3]. Другой задачей является изучение аналогичного отображения для иерархически построенных цепочек импедансов, моделирующих высокочастотные свойства перколяционной среды.

Рассмотрим двумерный (2D) случай. Отображение (1) имеет 3 неподвижных точки: 0, 1 и  $p_c = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Точка  $p_c$  является неустойчивой: при  $p_0 > p_c$   $p_n$  асимптотически стремится к 1, в противном случае к 0. Поэтому  $p_c$  является порогом перколяции. Исследование фракталов основывается на изучении простейшего нелинейного отображения Мандельброта

$$x' = F(x) = x^2 + c. \quad (2)$$

<sup>1)</sup>e-mail: Entin@isp.nsc.ru

Нетрудно видеть, что выбрав  $c = -1$ , подставив (2) само в себя и заменив  $x$  на  $-p$ , мы получим в точности отображение (1) при  $d = 2$ . Таким образом, отображение Сарычева (1) является частным случаем отображения Мандельброта. Рассматривая это отображение в комплексной плоскости  $p$ , мы можем определить области, старт из которых приводит к проводящей ( $p_n \rightarrow 1$ ) или непроводящей ( $p_n \rightarrow 0$ ) средам при  $n \rightarrow \infty$ . В терминах теории Мандельброта они называются бассейнами притяжения соответствующих точек.

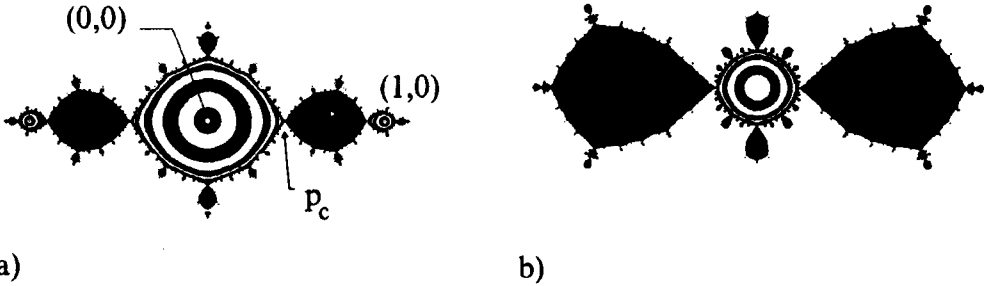


Рис.1. а - Бассейн притяжения неподвижной точки 0, соответствующей непротеканию при  $d = 2$ . Черным цветом закрашены области, в которых четно число шагов, требуемых для достижения окрестности точки 0, а также бассейны притяжения к другим неподвижным точкам, кроме бесконечности. б - То же, что на рис.а,  $d = 3$

На рис.1 изображен бассейн притяжения точки 0, соответствующий непротеканию в 2D случае. Он выделен путем раскраски плоскости в зависимости от четности числа шагов, требуемых для достижения круга с радиусом  $3 \cdot 10^{-2}$  вокруг начала координат. Бассейны притяжения других конечных неподвижных точек закрашены черным цветом. От отрезка  $(0,1)$  действительной оси, соответствующего физической области, бассейн притяжения нуля отсекает часть  $(0, p_c)$ . Протекающая система определяется отрезком  $(p_c, 1)$ , который попадает в бассейн притяжения точки 1 - черную область справа.

Фрактальная структура бассейна притяжения образуется областями, натянутыми на точки, отображающиеся в нуль после многократных повторений отображения, то есть являющиеся нулями функций  $F_n(p) = F(F(\dots F(p))\dots)$ . Эта функция определяет вероятность протекания квадрата со стороной  $2^n$ . Производная от  $F_n(p)$  по  $p$  может рассматриваться как функция распределения порогов перколяции.  $F(n)$  является полиномом  $2^n$  порядка с четными степенями.

Несложно получить асимптотическое поведение  $F_n$  при  $\delta p = p - p_c \rightarrow 0$ . Линеаризация отображения (2) дает  $\delta_{p'} = 2p_c \delta p$ , то есть  $F'_n(p_c) \simeq (2p_c)^n$ . Поскольку  $2p_c > 1$ , производная экспоненциально возрастает с  $n$  и  $F_n(p) \rightarrow \Theta(p - p_c)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Однако общий вид этой функции достаточно сложен. Можно показать, что общая формула для нулей этого полинома имеет вид

$$\sigma_1 \sqrt{1 + \sigma_2 \sqrt{1 + \sigma_3 \sqrt{\dots + \sigma_n}}}, \quad (3)$$

где  $\sigma_i = \pm 1$ . Все нули предшествующих отображений, очевидно, являются нулями и последующих. Предыдущие нули входят с более высокой кратностью.

В частности, если  $n = 2^k$ , то нуль  $2^j$ -того отображения ( $j < k$ ) входит с кратностью  $2^{k-j}$ .

В пределе  $n \rightarrow \infty$  нули стремятся к границе бассейна притяжения, образуя так называемое множество Жюлиа. Фрактальность множества Жюлиа можно обнаружить, если рассмотреть периодические подпоследовательности  $\{\sigma_i\}$ . Каждая из таких подпоследовательностей стремится к своему иррациональному пределу. Все их пределы вместе образуют фрактальную границу.

Легко получить физическую интерпретацию бассейна притяжения. Рассмотрим величину  $\text{Re}(\ln F_n(x))$ . Эта величина является 2D электростатическим потенциалом зарядов, помещенных в нули функции  $F_n(x)$  с величиной, равной кратности нуля. Бассейн притяжения образуется эквипотенциальными линиями. Вблизи самых больших зарядов – нулей отображений с малыми  $j$  – возникают большие круговые области влияния зарядов. С увеличением  $j$  число областей растет как число нулей, а их размер  $\rho_n$  убывает. Скорость убывания размера можно найти из условия равенства потенциала, создаваемого зарядами, в точках сочленения границ соответствующих областей:

$$2^{-j} \ln \rho_{2^j} = 2^{-(j+1)} \ln \rho_{2^{-(j+1)}},$$

откуда  $\rho_n = \rho_0^n$ . Выбор набора  $\{\sigma_n\}$  равным 1 дает в соответствии с теоремой Ли-Янга цепочку нулей полинома, стремящихся к  $p_c$ .

Таким образом, вероятность перколяции в пределе больших  $n$  весьма просто ведет себя на действительной оси – как  $\Theta(p - p_c)$ , и сложно, фрактально, в комплексной плоскости. Знание особенностей  $F_n(p)$  в комплексной плоскости не нужно, если интересоваться только ее асимптотикой при больших  $n$  и вблизи перехода. Однако, если мы хотим описывать ее при всех  $n$  и вдали от точки перехода, знание нулей  $F_n(p)$  позволяет восстановить всю функцию.

Другим примером фрактального поведения является зависимость импеданса большой иерархически построенной схемы от частоты в случае малых реальных потерь. В работе [4] было обнаружено, что в случайной среде, построенной из емкостей, индуктивностей и малых по величине сопротивлений, локальное электрическое поле испытывает аномально сильные флуктуации. Так, в 2D среде Дыхне [5], построенной из двух металлов, на частоте между их плазменными частотами мнимая часть эффективной диэлектрической проницаемости отлична от нуля в отсутствие локального поглощения. Это приводит к расходимости локального электрического поля<sup>2)</sup> Мы покажем, что аномально сильные флуктуации свойств имеются даже в регулярной иерархической цепочке. Строго говоря, в отсутствие поглощения не происходит даже самоусреднения системы.

Рассмотрим электрические схемы на рис.2. Мы будем считать начальный элемент  $i$  емкостью  $C$  с импедансом  $Z_i = i/\omega C$  на частоте  $\omega$ , а импеданс исходного элемента последовательности итераций  $Z_0 = -iL\omega + R$  состоящим из индуктивности  $L$  и активного сопротивления  $R$ . Переходя к безразмерным переменным  $z_n = \omega C Z_n$ ,  $z_0 = -iLC\omega^2 + RC\omega$ , получим для схемы рис.2а

$$z_{n+1} = i \frac{(2z_n + i)}{(z_n + i)}. \quad (4)$$

<sup>2)</sup>Э.М.Баскин, М.В.Энтин, А.Снарский, А.К.Сарычев, частное сообщение.

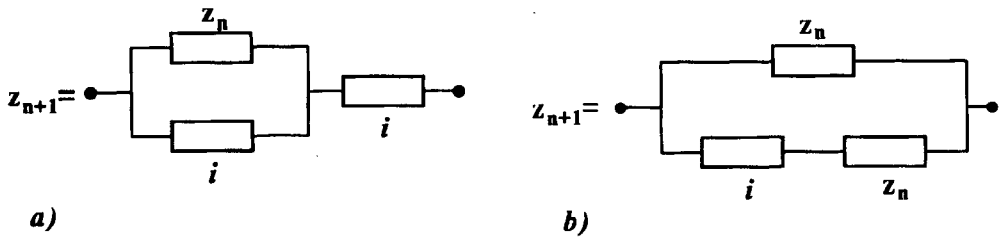


Рис.2. Схемы иерархических цепочек *a* и *b* соответствуют выражениям (4) и (5)

Явная формула для  $z_n$  имеет вид  $z_n = (if_{n+1}z_0 - f_n)/(f_n z_0 + if_{n-1})$ , где  $f_n$  - числа Фибоначчи

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Совокупность как полюсов, так и нулей имеет точку сгущения  $-i(\sqrt{5} - 1)/2$ . В окрестности этой точки  $z_n$  плохо сходится.

В разобранным примере конечная формула сводится к дробно-линейному преобразованию. В общем случае отображение (2), проведенное  $n$  раз, приводит к рациональной функции высокого порядка. Результат этого отображения в пространстве  $z_0$  можно предсказать из знания неподвижных точек и полюсов преобразования. С повышением степени преобразования число их увеличивается как  $2^n$ , и поэтому сходимость отображения становится фрактальной функцией исходного импеданса.

Рис.2*b* соответствует отображение

$$z_{n+1} = \frac{z_n(z_n + i)}{2z_n + i}. \quad (5)$$

На рис.3 приведен импеданс после 10 итераций от  $z_0$ . Из рисунка видно, что он в отсутствие поглощения является фрактальной кривой. Согласно определению  $z_0$ , фрактальность воспроизводится на частотной зависимости импеданса. Причина возникновения фрактального поведения обусловлена тем, что в системе возникают случайные контуры, резонирующие на частоте  $\omega$ . В пределе малого  $R$  ширина резонанса определяется величиной  $R/L$ . Общее число резонансов, распределенных на характерной полосе частот порядка  $\sqrt{LC}$ , определяется числом элементов системы  $2^n + 1$ . С увеличением статической проводимости элементов резонансы перестают перекрываться, если  $\sqrt{LC}2^{-n}L/R > 1$ , и кривая поглощения сглаживается.

Важным свойством перколяционной системы является радиус корреляции  $r_c$ . Геометрический радиус корреляции определяется как масштаб, на котором вероятность двум узлам принадлежать одному кластеру начинает спадать быстрее, чем по степенному закону. На пороге перколяции радиус корреляции обращается в бесконечность.

При рассмотрении проводимости двухфазной случайной системы с конечными проводимостями фаз на постоянном токе считается, что радиус корреляции связан с отношением проводимостей  $h = \sigma_1/\sigma_2$ :  $r_c \sim h^{-\beta}$ . Однако в случае переменного поля вопрос, чем определяется величина радиуса корреляции,

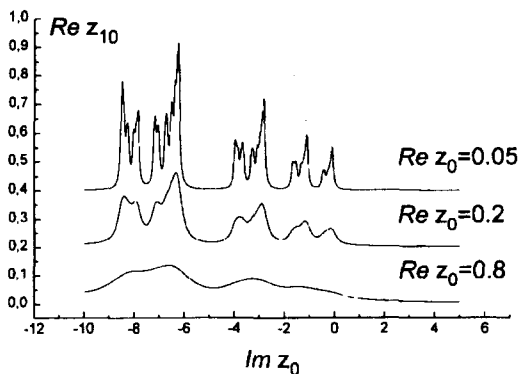


Рис.3. Импеданс цепочки рис.2б как функция мнимой части начального импеданса после 10 итераций. Соседние кривые, кроме нижней, приподняты на 0.2 относительно друг друга для лучшего разрешения

остается открытым. Заведомо действительная величина, какой является  $\tau_c$ , не может быть аналитической функцией импедансов, поэтому зависимость  $\tau_c(\sigma_1, \sigma_2)$  нельзя аналитически продолжать. В качестве альтернатив можно предложить отношение модулей проводимостей или отношение их действительных частей.

В модели, соответствующей рисунку 2б, с увеличением номера итерации импеданс стремится к нулю. В пределе достаточно больших по номеру шагов ренормгрупповое уравнение можно превратить в дифференциальное  $dz/dn = -z^2$  с решением  $z = 1/(n + A)$ . Естественно считать длиной корреляции в единицах  $n$  такое значение  $n$ , при котором  $z$  выходит на этот асимптотический закон. При действительном  $z$  это происходит для  $n \sim \ln z$ .

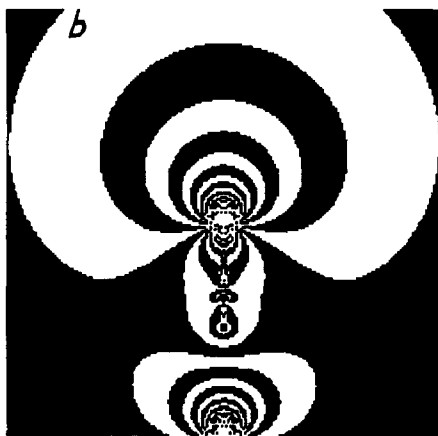
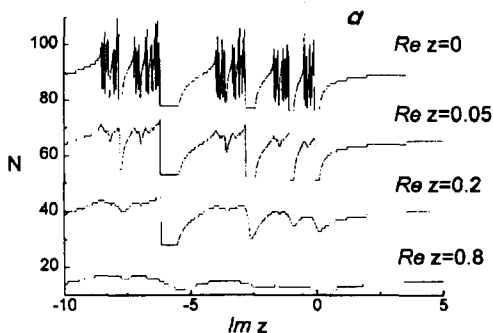


Рис.4. а - Количество шагов, требуемых для достижения окрестности  $3 \cdot 10^{-2}$ , как функция начального импеданса для схемы рис.2б. Соседние кривые, кроме нижней, приподняты на 25 относительно друг друга. б. - Аналогичная рис.1 двоичная раскраска плоскости начальных импедансов

На рис.4 приведена зависимость числа итераций, начиная с которых импеданс становится по модулю меньше 0.01, от начального импеданса. Видно, как эта зависимость становится фрактальной по мере уменьшения  $R$ .

Корреляционный радиус, оцениваемый из условия сглаживания резонансов, имеет вид  $n \sim \ln(1/R)/\ln 2$ . Обращение в бесконечность  $r_c$  понятно, если интерпретировать рассмотренную систему при  $R \rightarrow 0$  как систему локализованных состояний для фотона, связанных между собой. При такой постановке спектр системы состоит из отдельных линий, не исчезающих в отсутствие релаксационного сбоя фазы. В то же время, замена  $z \rightarrow iz$  дает систему связанных положительных и отрицательных сопротивлений, то есть содержащую усиливающие участки, что объясняет отсутствие термодинамического предела.

Настоящая работа была частично поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 95-02-04432, 96-02-19353 и фондом фирмы Volkswagen.

- 
1. А.К.Сарычев, ЖЭТФ **72**, 1001 (1977).
  2. J.P.Clerc, G.Giraud, J.M.Laugier, and J.M.Luck, *Advances in Physics* **39**, 191 (1990).
  3. Х.О.Пайтген, П.Х.Рихтер, *Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем*, М.: Мир, 1993, с.176.
  4. F.Brouers, S.Blacher, N.Henriouille, and A.Sarychev, In *Electrical Transport and Optical Properties of inhomogeneous media*, М.: Scientific Center for Applied Problems in Electrodynamics, 1996, p.46.
  5. А.М.Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).