Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.6, стр.438 - 441 © 1996г. 25 сентября

СФЕРИЧЕСКОЕ Р-СПИНОВОЕ СТЕКЛО ПРИ $P \to \infty$ И ХРАНЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ НЕПРЕРЫВНЫХ СПИНОВ

Д.Б.Саакян[1)]

Ереванский физический институт
375036 Ереван, Армения
Объединенный институт ядерных исследований
141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 19 марта 1996 г.
После переработки 15 августа 1996 г.

Рассматривается предел $P \to \infty$ в сферическом Р-спиновом стекле. Возможно хранение информации в основном состоянии конфигурации ферромагнитной фазы. Вычисляется максимально допустимый уровень шума в ферромагнитной фазе.

PACS: 75.50.Lk

Модель Дерриды [1,2] была применена для задач оптимального кодирования [3-6]. Задача ставится следующим образом. Константы $J^0_{i_1..i_p}$ для N-спинового гамильтониана $H(\sigma)$ подбираются так, чтобы основным состоянием этого гамильтониана получилась заданная конфигурация $\{\xi_i\}$:

$$J^0_{i_1..i_p} = \xi_{i_1}\dots\xi_{i_P}, \tag{1}$$

$$H = -\sum_{1\le i_1<i_2..<i_p\le N}\sum_{k=1}^{\alpha N} C^k_{i_1..i_p} J^0_{i_1..i_p}\sigma_{i_1}..\sigma_{i_p}, \tag{2}$$

где $C^k_{i_1..i_p}$ матрица связанности. Он имеет только один ненулевой элемент (равный единице) для каждого k при некотором выборе индексов $(i_1\cdots i_P)$. Спины σ_i, ξ_i принимают значение ± 1. Наш Гамильтониан $H(\sigma)$ имеет минимум на конфигурации $\{\sigma_i\} = \{\xi_i\}$.

Как было доказано в [4], конфигурация $\{\xi_i\}$ остается основным состоянием, даже когда к нашим константам примешивается шум (наши первоначальные константы $J^0_{i_1..i_p}$ с вероятностью $(1+m)/2$ остаются неизменными и с вероятностью $(1-m)/2$ меняют знак), при соблюдении условия

$$\alpha[\ln 2 + \frac{1+m}{2}\ln\frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2}\ln\frac{1-m}{2}] \ge \ln 2. \tag{3}$$

Это неравенство, выведенное как условие для существования ферромагнитной фазы модели (1),(2) в пределе $P \to \infty$ совпадает с шенноновским неравенством из теории информации. Только гамильтониан Дерриды насыщает предел Шеннона. При других выборах гамильтониана $H(\sigma)$ мы нуждаемся в большем количестве констант (чем αN из (3)) для существования ферромагнитной фазы с полной намагниченностью $<\sigma_i\xi_i>\sim 1$. Наше первоначальное сообщение (с длиной N)$\{\xi_i\}$ было преобразовано в сообщение (с длиной αN) $\{J_{i_1..i_p}\}$. Таким образом мы провели кодирование. Процедуре декодирования соответствует

[1)]e-mail: Saakian@vx1.YERPHI.AM

поиск основного состояния гамильтониана. Когда с вероятностью, близкой к единице, найденное состояние есть наше первоначально заданное, наша схема кодирования работает успешно. В терминах статистической физики мы нуждаемся в полной намагниченности на нашу первоначально заданную конфигурацию при низких температурах. Лишь в пределе больших P имеет место оптимальное кодирование.

Возможно ли построение аналогичного гамильтониана для непрерывных спинов? Давайте рассмотрим N спинов σ_i при ограничении

$$\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i)^2 = N \tag{4}$$

и аналогично для ξ_i. Опять мы рассматриваем гамильтониан (1),(2). Если наша матрица связности была выбрана симметричной по индексам i_α и мы расширяем суммирование по индексам i_α в (2) до $1 \le i_\alpha \le N$, $H(\sigma)$ переходит в

$$H(\sigma) = -(\sum_i \sigma_i\xi_i)^P \frac{\alpha N}{N^P}. \tag{5}$$

Эта функция имеет минимум при $\{\sigma_i\} = \{\xi_i\}$. В пределе $N \gg P \gg 1$ это будет минимумом гамильтониана (2) с ограниченным суммированием для индексов в (2) (вместо $1 \le i_\alpha \le N$).

Чтобы найти аналог неравенства (3), нам надо найти фазовую структуру сферического P-спинового стекла [7-10]. Статический вариант модели был решен в [8], нам достаточно лишь слегка модифицировать их вычисления для рассмотрения ферромагнитной фазы и предела $P \to \infty$. Мы видим, что наш гамильтониан имеет правильный минимум даже в классе непрерывных спинов со сферическим ограничением при однородном выборе матрицы связности C. Ситуация отличается от случая дискретных спинов, где условие однородности не является обязательным.

Для решения случая нетривиальной матрицы связности рассмотрим разреженное сферическое P-спиновое стекло. Как первый шаг, рассмотрим простой случай полностью связанной модели (матрица C отсутствует) с гамильтонианом

$$H = -\sum_{1\le i_1<i_2..<i_p\le N} (J_0 N/C_N^P + J_{i_1..i_p}\sqrt{N/C_N^P})\sigma_{i_1}..\sigma_{i_p}, \tag{6}$$

где J_0 – ферромагнитная константа, а замороженные константы $J_{i_1\ldots i_p}$ (шум) имеют среднее 0 и дисперсию $< (j_{i_1\ldots i_p})^2 >= J^2/2$. Отношение сигнал/шум J_0/J напоминает m из (4).

Вычисляя Z^n методом реплик, аналогично [8], получаем

$$Z^n = \int_{-i\infty}^{i\infty} \prod_{\alpha<\beta} \frac{N dQ_{\alpha\beta} d\lambda_{\alpha\beta}}{2\pi} \prod_\alpha \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\sqrt{N}}{2\pi} d\lambda_{\alpha\alpha} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dt_\alpha dm_\alpha}{2\pi} \exp(NG), \tag{7}$$

где

$$G = J_0 B \sum_\alpha (m_\alpha)^P + \frac{B^2 J^2}{4} \sum_{\alpha,\beta}(q_{\alpha,\beta})^P - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha,\beta} \sum_\alpha t_\alpha m_\alpha + \frac{1}{2}\ln 2\pi +$$
$$+ \ln \int_{-\infty}^{\infty} \prod_\alpha dx_\alpha \exp\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha,\beta}x_\alpha x_\beta + \sum_\alpha t_\alpha x_\alpha\}. \tag{8}$$

В этом выражении $m_\alpha =< x_\alpha >$, $q_{\alpha\beta} =< x_\alpha x_\beta >$, а t_α и $\lambda_{\alpha\beta}$ сопряжены им. Уравнение (4) дает $q_{\alpha\alpha} = 1$.

После интегрирования по x_α, t_α, мы получаем

$$G = \frac{1}{2}\ln 2\pi + J_0 B(m)^P + \frac{B^2 J^2}{4}\sum_{\alpha,\beta}(q_{\alpha,\beta})^P + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha,\beta}(m_\alpha m_\beta - q_{\alpha,\beta}) - $$
$$-\frac{1}{2}\ln det\{-\lambda^{-1}\}_{\alpha,\beta}. \qquad (9)$$

Условие перевала для $\lambda_{\alpha,\beta}$ дает $q_{\alpha,\beta} = m_\alpha m_\beta - \{\lambda^{-1}\}_{\alpha,\beta}$

При высоких температурах система находится в парамагнитной фазе, где $m_\alpha = 0, q_{\alpha\neq\beta} = 0$. Легко вывести, аналогично [8]:

$$G = \frac{1}{2}(1 + \ln 2\pi) + \frac{B^2 J^2}{4} \qquad (10)$$

В спин-стекольной фазе мы рассматриваем однократное нарушение репличной симметрии до блока индексов размером m_1. Мы имеем $q_{\alpha\alpha} = 1, q_{\alpha\beta} = q$ для $\alpha\beta$ из одного блока размером m_1, а для других наборов индексов $q_{\alpha\beta} = 0$.
Тогда (9) переходит в

$$G = \frac{1}{2}(1 + \ln 2\pi) + \frac{B^2 J^2}{4}[1 + (m_1 - 1)q^P] + \frac{m_1 - 1}{2m_1}\ln[1 + (m_1 - 1)q]. \qquad (11)$$

Дифференцировав по m_1 и q и поделив уравнения друг на друга, получим

$$\frac{q^2}{p} = \frac{(1-q)(1-q+mq)}{m^2}\ln(1-q+mq)(1-q) - \frac{q(1-q)}{m}, \qquad (12)$$
$$\frac{PB^2 J^2}{4}q^P = \frac{1}{2(1-q)(1-q+mq)}.$$

Теперь рассмотрим предел $P \to \infty$. Положим:

$$q = 1 - \epsilon, \quad \epsilon \to 0. \qquad (13)$$

Тогда (16) переходит в

$$\frac{1}{P} = \frac{\epsilon}{m}\ln\frac{m}{\epsilon}, \qquad \frac{PB^2 J^2}{2} = \frac{1}{\epsilon m}. \qquad (14)$$

Его решение имеет вид

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2}{\ln P}}\frac{1}{PBJ}, \qquad (15)$$
$$m = \frac{\sqrt{2\ln P}}{BJ}. \qquad (16)$$

Для свободной энергии получаем

$$G = \frac{BJ\sqrt{2\ln P}}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{PBJ}{\sqrt{2\ln P}} + \frac{1}{2}(1 + \ln 2\pi). \qquad (17)$$

Находим точку фазового перехода B_c между парамагнетиком и спиновым стеклом, сравнив (24) и (13):

$$B_c = \sqrt{2\ln P}/J. \qquad (18)$$

В ферромагнитной фазе в главном приближении (достаточном для нас) имеем $\ln Z/N = J_0 B$. Более аккуратное рассмотрение дает

$$\frac{\ln Z}{N} = J_0 B - \frac{\ln P}{2}. \qquad (19)$$

Сравнение с двумя другими фазами показывает, что при высоких B ферромагнитная фаза появляется, когда

$$J_0 > \sqrt{\frac{\ln P}{2}} J, \quad B > B_c \equiv \sqrt{2 \ln P}/J. \tag{20}$$

Это основной результат данной работы. Он напоминает результат для дискретных спинов с взаимодействием типа Поттса при числе цветов P. Впрочем, аналогия не полная, поскольку в случае модели Поттса при любом Q при низких температурах мы имеем полную намагниченность, а в нашем случае для этого приходится P стремить к бесконечности.

Сколько информации содержится в основном состоянии N спинов, заданных с точностью $1/P$? Это должно быть (с точностью порядка $1/P$ из-за геометрического фактора) $N \ln 1/P$. Поскольку это совпадает с количеством информации, содержащемся в константах связи, мы опять имеем пример оптимального кодирования. Таким образом, ситуация отличается от случая $P = 2$ [11], где намагниченность лишь частичная и нет оптимального кодирования.

Было бы очень интересно решить разреженный вариант модели, где в случае модели Дерриды с непрерывными константами связи отсутствует оптимальное кодирование.

Мультикритичная точка имеет координаты

$$B_c = \sqrt{2 \ln P}/J, \quad J_0 = \sqrt{\frac{\ln P}{2}} J. \tag{21}$$

Интересно было бы установить аналог линии Нишимори. Прямое расширение методов [12] не получается, но идея о резонансе между гибсовским распределением и неоднородным распределением констант слишком красива, чтобы ее отбросить.

Я хочу поблагодарить Ю Лу за приглашение в Триест, Е.П.Жидкову за возможность работать в ЛВТА ОИЯИ, Дубна. В ходе выполнения работы были многочисленные дискуссии с С.Францом, за что я очень признателен ему. Я признателен М.Вирасоро за обсуждение проблем спиновых стекол и Х.Нишимори за полезное замечание.

Работа частично поддержана Министерством исследований и технологии Германии грант 211-523 и грант INTAS-93-633.

---

1. B.Derrida, Phys. Rev. Lett. **45**, 79 (1980).
2. D.Gross, M.Mezard, Nucl. Phys. **B240**, 43 (1984).
3. N.Sourlas, Nature **239**, 693 (1989).
4. D.Saakian, JETP Lett. **55**, 192 (1992).
5. P.Rujan, Phys. Rev. Lett. **70**, 2668 (1993).
6. H.Nishimori, Physica **A204**, 1 (1995).
7. T.Kirkpatrick and D.Thimuralai, Phys. Rev. **B36**, 5388 (1987).
8. A.Crisanti and H.Sommers, Z. Phys. **B 87**, 341 (1992).
9. L.Cugliandolo and J.Kurchan, Phys. Rev. Lett. **71**, 173 (1993).
10. S.Franz and G. Parisi, J. de Phys. I **5**, 1401 (1995).
11. Y.Ozeki and H. Nishimori, J. Phys. **A26**, 3399 (1993).
12. J.M.Kosterlitz, D.J.Thouless, and R.C.Jones, Phys. Rev. Lett. **36**, 1217 (1976).