

НОВЫЕ ОБЛАСТИ ПРОЗРАЧНОСТИ ДЛЯ ВОЛН ПРОМЕЖУТОЧНОГО ЧАСТОТНОГО ДИАПАЗОНА В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Е.З.Гусаков, М.А.Ирзак, А.Д.Пилюя

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе РАН

194021 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 1 октября 1996 г.

После переработки 15 ноября 1996 г.

Показано существование в неоднородной магнитоактивной плазме новых областей прозрачности, отсутствующих в традиционном геометрико-оптическом подходе. Предложено обобщенное дисперсионное уравнение, адекватно описывающее распространение электромагнитных волн в этих областях.

PACS: 52.35.-g

Геометрико-оптический подход эффективно используется для анализа распространения волн в неоднородной плазме [1]. В случае, когда плазма неоднородна только вдоль одного направления, метод основывается на разложении электрического поля в асимптотической ряд

$$E_i(x) = \{E_i^{(0)}(x) + E_i^{(1)}(x) + E_i^{(2)}(x) + \dots\} \exp \left[i \frac{\omega}{c} \left(\int^x N_x(x') dx' + N_y y + N_z z \right) \right], \quad (1)$$

где предполагается, что члены ряда $E_i^{(n)}(x)$ убывают как $(k_x L)^{-n}$ (L – масштаб неоднородности плазмы). Для их определения нужно подставить (1) в волновое уравнение

$$\Delta E - \text{grad div} E + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E = 0 \quad (2)$$

и приравнять члены при одинаковых степенях малого параметра. В нулевом приближении можно пренебречь зависимостью $E_i^{(0)}(x)$ и определить как дисперсионное соотношение

$$D_0(\omega, k, x) = 0, \quad (3)$$

определяющее зависимость волнового вектора от частоты и координаты, так и поляризацию волны. Эти результаты совпадают с соответствующими выражениями, полученными в теории однородной плазмы. В следующих порядках приближения находятся зависимости $E_i^{(0)}(x)$ и затем $E_i^{(n)}(x)$. Геометрико-оптический подход справедлив только для слабонеоднородной плазмы. Обычно, по аналогии со случаем немагнитной плазмы, считают, что критерием применимости приближения является условие

$$\frac{1}{k_x^2} \frac{dk_x}{dx} \ll 1, \quad (4)$$

хотя, строго говоря, необходимым условием корректности применения геометрической оптики является условие

$$|E_i^{(0)}| \gg |E_i^{(1)}|. \quad (5)$$

Важность этого замечания можно проиллюстрировать на следующем примере. В случае, когда плазма неоднородна поперек внешнего магнитного поля $B = B_0 e_z$, дисперсионное уравнение (3) выглядит особенно просто для поперечно распространяющихся волн $N_z = 0$. Для необыкновенной волны в модели холодной плазмы оно выглядит так:

$$N_x^2 = \frac{\epsilon^2 - g^2}{\epsilon} - N_y^2; \quad \epsilon \approx 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad g \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}}. \quad (6)$$

В частности, из этого уравнения следует, что нижегибридный (НГ) резонанс при поперечном распространении недоступен с периферии плазмы и что волны, имеющие $N_y > 1$ (то есть замедленные в направлении, перпендикулярном как градиенту концентрации, так и направлению магнитного поля), не распространяются. В последнем случае, в соответствии с (6), электрическое поле волны спадает экспоненциально в глубину плазмы по закону

$$E_y \propto \exp\left(-\frac{\omega}{c} \int^x \sqrt{N_y^2 - 1 + g^2} dx\right), \quad (7)$$

справедливому согласно (4), если $|g'| \ll (\omega/c)N_y^2$ (здесь и далее штрих обозначает пространственную производную d/dx).

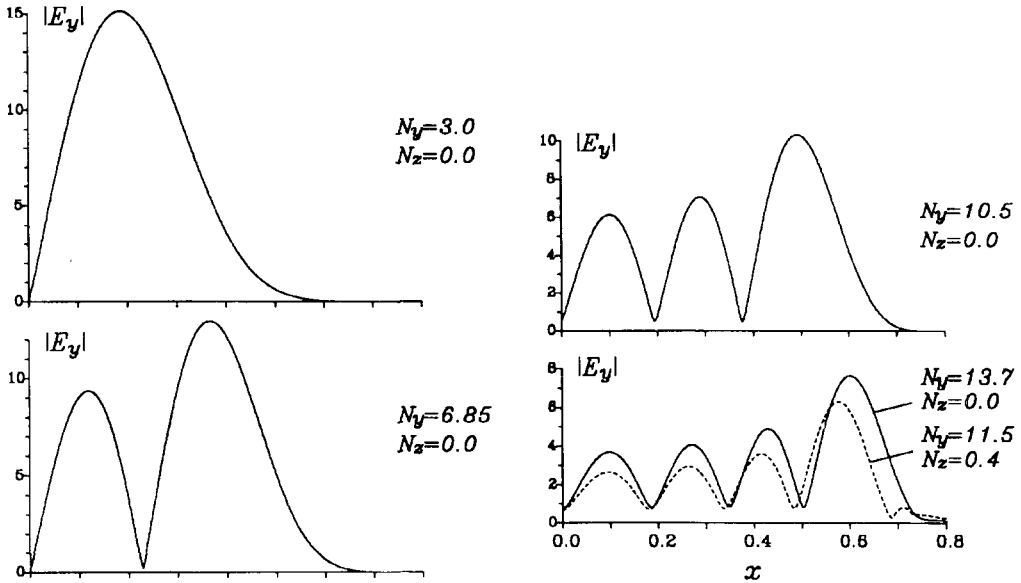


Рис.1. Структура электрических полей в плазме: $f = 500$ МГц, $B = 18$ кГс, $\nabla n = 10^{12}$ см $^{-4}$. Координата x нормирована на c/ω

Однако в некоторых случаях этот вывод находится в разительном противоречии с результатами численного решения уравнения (2). К примеру, на рис.1 показано пространственное распределение компоненты электрического поля E_y , возбуждаемого с периферии плазмы на частоте 500 МГц. При магнитном поле $B = 18$ кГс и градиенте концентрации $\nabla n_e = 10^{12}$ см $^{-4}$ НГ резонанс

расположен на расстоянии примерно 7 см от поверхности плазмы. Видно, что при некоторых значениях $N_y \gg 1$, удовлетворяющих критерию (4), в плазме возбуждается набор собственных мод. С ростом N_y поле волны проникает все глубже внутрь плазмы, а длина волны уменьшается. При $N_y > 16$ область распространения достигает НГ резонанса, где имеет место сильное поглощение. Такое противоречие между геометрико-оптическим описанием (7) результатами численного счета связано с нарушением необходимого условия применимости геометрической оптики (5), которое в нашем случае имеет вид $|g'| \ll (\omega/c)N_y$.

Возможность сильного затухания НГ волн при поперечном распространении была замечена в работе [2], где численно исследовалось поглощение НГ волн в неоднородном цилиндрическом плазменном столбе. Доступность НГ резонанса в [2] была качественно подтверждена анализом дифференциального уравнения, описывающего необыкновенную волну, и был сделан вывод о невозможности описания этого эффекта в рамках приближения геометрической оптики и о необходимости численного решения уравнения (2).

Отметим, однако, что решения уравнения (2), приведенные на рис.1 для различных значений N_y , имеют "геометрико-оптический вид", то есть могут быть представлены с помощью синусоидальной функции с плавно меняющейся длиной волны и амплитудой. Вид этой функции в случае $N_x = 0$ можно определить из уравнения, описывающего поведение компоненты поля E_y :

$$E_y'' + \left[\frac{\epsilon'}{\epsilon} + \frac{\epsilon'}{N_y^2 - \epsilon} \right] E_y' + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\epsilon^2 - g^2}{\epsilon} - N_y^2 - \frac{N_y}{\epsilon} \frac{c}{\omega} g' - \frac{\epsilon'}{\epsilon} \frac{g N_y}{(N_y^2 - \epsilon)} \right] E_y = 0, \quad (8)$$

и являющегося дифференциальным уравнением второго порядка. Используя при решении этого уравнения приближение ВКБ, являющееся частным случаем геометрико-оптического, можно выразить поле E_y в виде (1), с тем, однако, отличием, что показатель преломления N_x при этом должен удовлетворять не условию (6), а соотношению, включающему члены, которыми пренебрегают в классическом геометрико-оптическом анализе:

$$N_x^2 = \frac{\epsilon^2 - g^2}{\epsilon} - N_y^2 - \frac{N_y}{\epsilon} \frac{c}{\omega} \frac{dg}{dx}. \quad (9)$$

При выводе уравнения (9) использовано условие $|g'| \gg |\epsilon'|$, имеющее место в промежуточном частотном диапазоне. Из этого соотношения, область применимости которого определяется критерием (4), следует, что НГ резонанс становится доступным для волн с положительным значением $N_y > 0$, удовлетворяющем следующим условиям:

$$N_y \frac{c}{\omega} \left| \frac{dg}{dx} \right| > N_y^2 \text{ на границе плазмы и } N_y \frac{c}{\omega} \left| \frac{dg}{dx} \right| > g^2 \text{ вблизи НГ резонанса.}$$

Согласно (9), максимальный размер области распространения волны $\mathcal{L} = c/2\omega$ достигается при $N_y = (c/2\omega_{ce})(\nabla n_e/n_{cr})$. НГ резонанс становится доступным при $L_n = (n'_e/n_{e0})^{-1} < c/\omega$.

Негеометрико-оптические члены могут приводить к принципиально новым эффектам и при $N_x \neq 0$. Критерий отбора существенных членов при этом можно проиллюстрировать на примере потенциального случая $E = -\nabla\varphi$, описываемого уравнением $\text{div} D = 0$. В этом случае уравнение потенциала электрического поля имеет вид

$$\epsilon\varphi'' + \epsilon'\varphi' - \left(\frac{\omega}{c} N_y g' - \frac{\omega^2}{c^2} N_y^2 \epsilon - \frac{\omega^2}{c^2} N_x^2 \varphi \right) = 0. \quad (10)$$

Выполняя геометрико-оптическую подстановку типа (1) и пренебрегая членами $\epsilon'_{ik} \ll (\omega/c)N_x\epsilon_{ik}$, получаем дисперсионное соотношение

$$\epsilon(N_x^2 + N_y^2) + \eta N_z^2 + \frac{c}{\omega} N_y g' = 0. \quad (11)$$

Здесь сохранен член $(c/\omega)N_y g'$, так как в (10) члены, пропорциональные $N_y N_x g$, взаимно уничтожились. Условие $(\omega/c)N_x L_n \gg 1$ в этом случае не является достаточным для пренебрежения. Отметим, что близкое по виду локальное дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний плазмы было получено в теории дрейфовых неустойчивостей [3]. В настоящей работе уравнения, содержащие градиентные члены, используются не для локального анализа устойчивости, а для исследования распространения устойчивых волн в неоднородной плазме.

Подобным образом можно действовать и в общем случае. Представим электрическое поле в виде суммы потенциальной и вихревой частей $E_i = -\nabla_i \varphi + E_i$. Затем подставим геометрико-оптическое представление этих полей (1) в (2) и получим уравнение для потенциала. При этом будем оставлять члены с пространственными производными компонент тензора диэлектрической проницаемости только в том случае, если обращаются в нуль соответствующие им главные (классические) члены, пропорциональные самим компонентам тензора. Производными же от амплитуды электрических полей будем пренебрегать всегда. В результате получаем модифицированное дисперсионное соотношение в виде

$$D_0(N, \omega, x) + \delta D = 0, \quad (12)$$

где

$$\delta D = \frac{\epsilon - N^2}{N^2} (\eta - N^2) \left\{ \frac{c}{\omega} \nabla g \left[\mathbf{N} \times \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \right] - g N \frac{c}{\omega} \text{rot} \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \right\}; \quad \mathbf{N} = N_x \mathbf{e}_x + N_y \mathbf{e}_y + N_z \mathbf{e}_z.$$

Это соотношение отличается от локального дисперсионного уравнения потенциальных плазменных колебаний, полученного в [3] при анализе низкочастотных дрейфовых неустойчивостей, учетом кривизны магнитного поля и отсутствием мнимых слагаемых, приводящих к фиктивному экспоненциальному росту. Как представляется, учет этих слагаемых в дисперсионном уравнении является превышением точности первого порядка приближения геометрической оптики.

Дисперсионные кривые $N_x(x)$, полученные из (12) для $N_z = 0.4$ при различных N_y , для параметров приведенного выше численного расчета показаны на рис.2. Видно, что область прозрачности при больших значениях $|N_y|$ появляется лишь при $N_y > 0$. Условие возбуждения собственных мод, локализованных в этой области и являющихся аналогом мод, изображенных на рис.1, имеет вид правила квантования:

$$\frac{\omega}{c} \oint N_x dx = \frac{3\pi}{2} + n\pi, \quad (13)$$

связывающего значения показателей преломления N_y и N_x .

Аналогичное соотношение может быть получено из результатов численного решения уравнения (2), из условия равенства нулю компонент матрицы поверхностного импеданса плазмы. Эти два предсказания сравниваются на рис.3, на котором видно их хорошее соответствие.

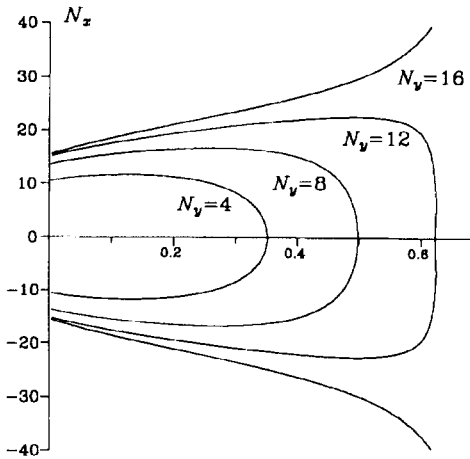


Рис.2. Дисперсионные кривые для тех же параметров плазмы; $N_x = 0.4$

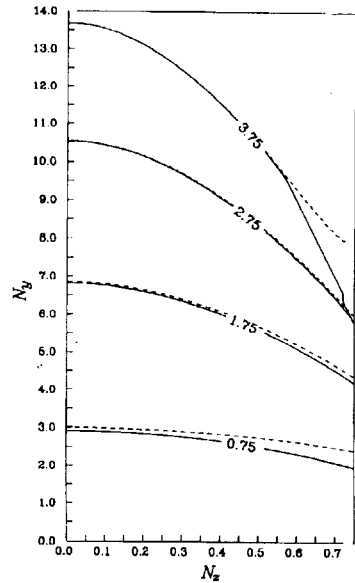


Рис.3. Положение нулей поверхностного импеданса плазмы E_y/B_z (штриховые кривые) и значения фазовых интегралов, посчитанных вдоль геометрико-оптических петель (сплошные кривые)

Неоднородность плазмы может оказывать большое влияние и на дисперсионные характеристики быстрых магнитозвуковых волн с частотой в несколько ионно-циклотронных. На рис.4 показано сравнительное положение нулей поверхностного импеданса плазмы и кривых, соответствующих возбуждению собственных мод, посчитанных с помощью правила квантования (13), в которое подставлялись значения N_x , вычисленные как из классического дисперсионного уравнения (3), так и из модифицированного уравнения (12), для частоты волны 20 МГц, магнитного поля 500 Гс и $\nabla n_e = 10^{12} \text{ см}^{-4}$. Отражающая металлическая стенка, расположенная на расстоянии 4.8 см от поверхности плазмы, создавала необходимую конфигурацию для возбуждения собственных мод плазменного волновода. Видно, что результаты, полученные с использованием модифицированного дисперсионного соотношения, очень хорошо согласуются с результатами численного счета, в то время как классическая формула находится с ними в разительном противоречии.

Хорошее соответствие предсказаний модифицированного дисперсионного уравнения (12) и результатов численных расчетов позволяет использовать его при анализе лучевых траекторий НГ волн в токамаке при моделировании генерации тока в плазме. На рис.5 представлены радиальные профили плотности ВЧ тока, вычисленные с использованием дисперсионного соотношения (3) - кривая 1 и (12) - кривые 2 и 3 для ко- и контр-инжекции тока в токамаке FT-2 ($a = 8 \text{ см}$, $R = 55 \text{ см}$, $n_e(0) = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e(0) = 450 \text{ эВ}$, $I_p = 30 \text{ кА}$, $B = 20 \text{ кГс}$, $P_{RF} = 400 \text{ кВт}$, $2 < N_x < 4$). Существенная разница в величине и

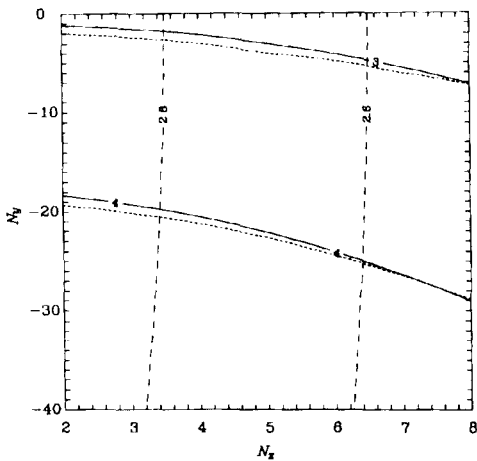


Рис.4. Положение нулей поверхностного импеданса плазмы E_y/B_z (пунктир) и значения фазовых интегралов, посчитанных вдоль геометрико-оптических петель по классическому (штриховые кривые) и модифицированному (сплошные кривые) уравнениям; $f = 20$ МГц, $B = 0.5$ кГс (26-я циклотронная гармоника водорода), $\nabla n = 10^{12}$ см $^{-4}$. Отражающая стенка расположена в 4.8 см от границы плазмы

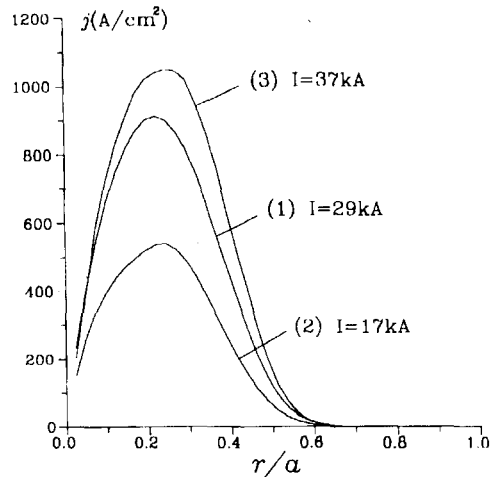


Рис.5. Радиальные профили ВЧ тока в токамаке ФТ-2, рассчитанные на основе (3) – кривая 1 и (12) – кривые 2 и 3 для ко- и контр-инжекции, соответственно

локализации ВЧ тока связана с различными условиями доступности для волн с противоположным знаком N_y .

Таким образом, негеометрико-оптически члены, обусловленные наличием неоднородности плазмы, могут приводить к существенному изменению дисперсионных характеристик волн промежуточного частотного диапазона. Они оказывают заметно влияние на форму лучевых траекторий и на профили ВЧ токов увлечения в небольших токамаках. Кроме того, их учет может быть важным при расчете условий доступности некоторых частей спектра вводимых в плазму волн.

1. В.Л.Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, М.: Наука, 1967.
2. Ю.Н.Днестровский, Д.П.Костомаров, Г.В.Переверзев и др. *Физика плазмы* **1**, 623 (1975).
3. А.Б.Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, т.2, М.: Атомиздат, 1977, гл.5 и 11.