

ТРАНСФОРМАЦИЯ СОЛИТОНА В ТОЧКЕ НУЛЕВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Т.Г.Талипова¹⁾, Е.Н.Пелиновский, Р.Гримшоу*

Институт прикладной физики РАН,
603600, Нижний Новгород, Россия

* Monash University
Clayton, 3168, Australia

Поступила в редакцию 25 ноября 1996 г.

Исследована трансформация солитона в зоне с меняющей знак нелинейностью в рамках модели уравнения Кортевега – де Бриза. Показано, что после прохождения критической зоны в волновом поле формируется солитон противоположной полярности, причем наряду с известным ранее механизмом генерации вторичного солитона за счет пьедестала, формирующегося на адиабатической стадии, существует и другой механизм, связанный с трансформацией волны в зоне переменной нелинейности после критической точки. Показано, что вклады обоих механизмов в энергетику вторичного солитона примерно одинаковы.

PACS: 02.30.Jr, 94.10.Jd

Динамика солитонов под действием слабых возмущений хорошо изучена: солитон изменяется адиабатически и за ним появляется пьедестал. Интересным примером нарушения адиабатичности трансформации солитона является трансформация солитона в зоне с изменяющей знак нелинейностью. Такая задача возникает, например, в теории внутренних волн в стратифицированном океане, когда наклонный пикноклин находится примерно посередине между дном и свободной поверхностью. Знак нелинейного коэффициента в уравнении Кортевега – де Бриза зависит от положения пикноклина, он отрицательный, если пикноклин располагается ближе к поверхности, и положительный в противоположном случае. Анализ трансформации солитона на наклонном пикноклине проводился довольно давно: уже при анализе адиабатической стадии было показано, что амплитуда солитона стремится к нулю при приближении к критической точке, где нелинейность обращается в нуль, и был сделан вывод о разрушении солитона в этой точке [1–3]. Последнее представлялось очевидным в силу сохранения массы волнового поля: новый солитон, который может существовать после критической точки, имеет другую полярность и не может вносить вклад в данный интеграл. Более поздние численные эксперименты подтвердили разрушение начального солитона, однако они показали, что после прохождения критической точки все таки формируется солитон противоположной полярности [4, 5]. Этот эффект связывался с возникновением еще на адиабатической стадии шельфа за солитоном, имеющим противоположную полярность, который и может стать источником генерации нового солитона (см. также [6]). При этом, по-существу, учитывается только "половинка" трансформации волны, только при ее движении к критической точке. Между тем, нелинейная трансформация волны имеет место и после прохождения критической точки, когда нелинейность возвращается к своему первоначальному (по модулю) значению: Как будет показано ниже, обе стадии трансформации

¹⁾email: tata@appl.sci-nnov.ru

волны (до и после критической точки) дают равнозначенный вклад в генерацию вторичного солитона. Важно подчеркнуть, что этот эффект имеет и важное практическое значение, так как недавно получены прямые доказательства изменения знака нелинейности для внутренних волн, трансформирующихся на шельфе [7].

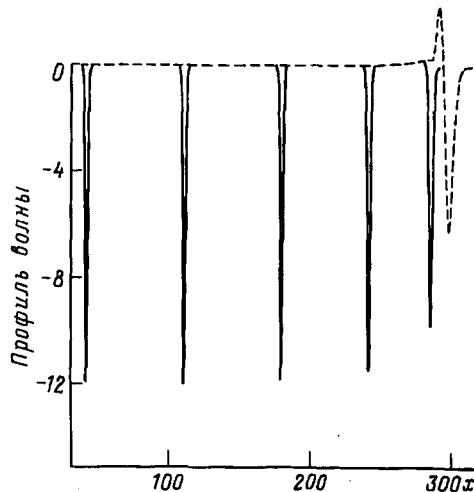


Рис. 1. Трансформация солитона в зоне отрицательного α в различные моменты времени ($\tau = 30$). Интервал между записями 0.2τ . Штриховая линия – форма волны в критической точке

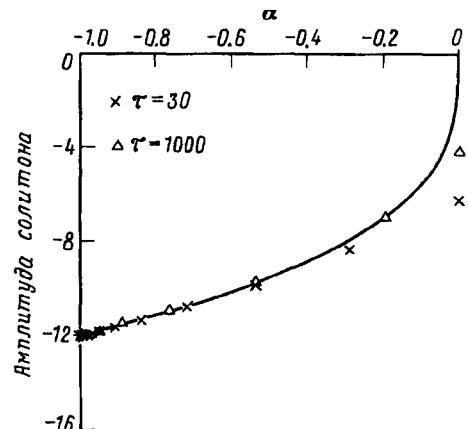


Рис. 2. Изменение амплитуды солитона для различных τ . Сплошная линия – адиабатическая зависимость (6)

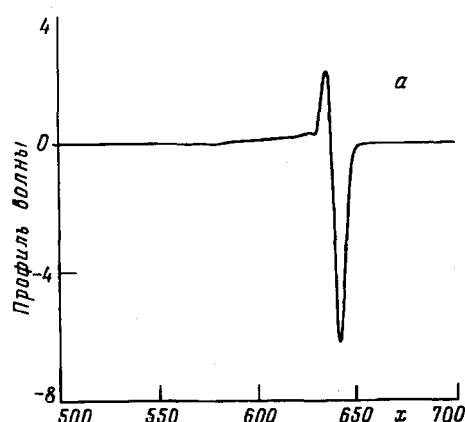
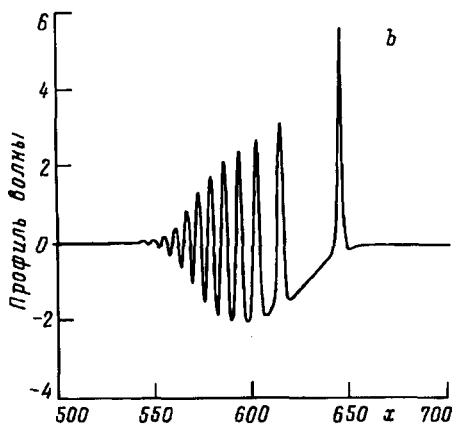


Рис. 3. Трансформация волны в зоне положительной α , а) $\alpha = 0$, б) $\alpha = 1$



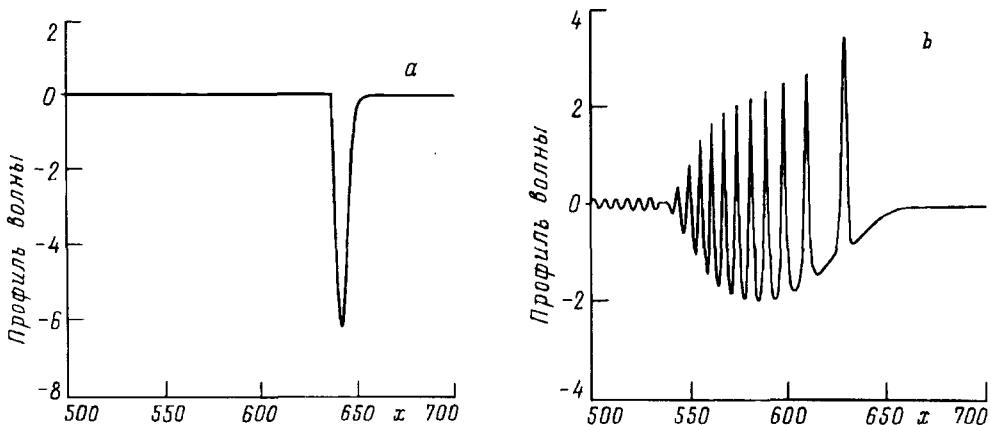


Рис. 4. Трансформация волны в зоне положительной α от отрицательного возмущения в критической точке, а) $\alpha = 0$, б) $\alpha = 1$

Рассмотрим следующую упрощенную форму уравнения Кортевега – де Вриза с переменным нелинейным коэффициентом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t) u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

причем мы будем предполагать, что нелинейный коэффициент меняет знак за характерное время τ и его асимптотические значения есть

$$\alpha(t \rightarrow -\infty) = -1, \quad \alpha(t \rightarrow \infty) = +1, \quad (2)$$

В случае $\alpha = -1$ солитон описывается известным выражением

$$u(x, t) = -12 \operatorname{sech}^2(x - 4t), \quad (3)$$

где мы приняли соответствующую нормировку волновой амплитуды, так что ширина переходной зоны также нормирована на ширину солитона. Отметим, что уравнение (1) имеет два закона сохранения: массы

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \text{const}, \quad (4)$$

и энергии

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t) dx = \text{const}. \quad (5)$$

Если ширина переходной зоны достаточно велика, то на первой стадии уменьшения нелинейного коэффициента солитон сохраняет свою форму, а его амплитуда определяется из закона сохранения энергии (5):

$$a(t) = -12 |\alpha(t)|^{1/3}. \quad (6)$$

Как видно из (6), амплитуда солитона стремится к нулю при приближении к критической точке, и, следовательно, солитон отрицательной полярности должен исчезать в этой точке. Одновременно в силу закона сохранения массы

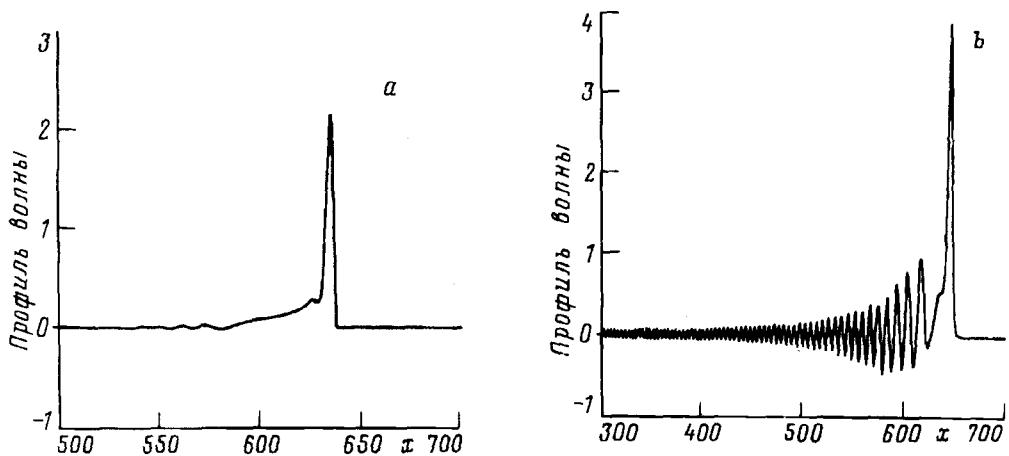


Рис. 5. Трансформация волны в зоне положительной α от положительного возмущения в критической точке, а) $\alpha = 0$, б) $\alpha = 1$

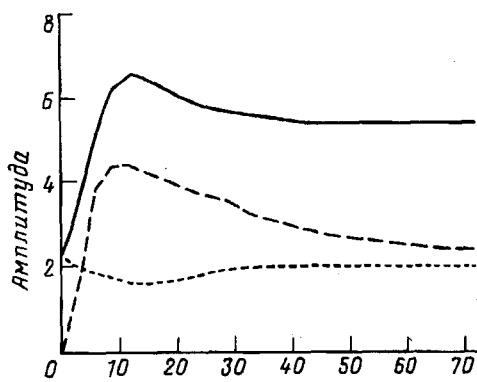


Рис. 6. Изменение амплитуды положительного импульса в зоне $\alpha > 0$ для различных возмущений в критической точке, Сплошная линия – реальное возмущение, штриховая линия – отрицательное возмущение, пунктирная линия – положительное возмущение

легко показать, что образуется дефицит массы, который приводит к возникновению пьедестала положительной полярности за "отрицательным" солитоном, который в рамках теории возмущений находится в явном виде [8, 9]:

$$u_s = 2 \frac{d\alpha/dt}{|\alpha|^{8/3}}. \quad (7)$$

Высота пьедестала неограниченно возрастает с приближением к критической точке.

Характер эволюции солитона на адиабатической стадии демонстрируется на рис. 1, 2, где показаны профили волны в различные моменты времени и связь амплитуды волны с локальным значением нелинейного коэффициента; эти рисунки получены численным интегрированием уравнения (1) для различных значений ширины переходной зоны τ . Как видим, амплитуда солитона хорошо описывается адиабатической формулой (6), за исключением окрестности критической точки.

После прохождения критической точки мы имеем сложный процесс трансформации нелинейной волны: разрушение первоначального отрицательного солитона, формирование осциллирующего пакета и генерация вторичных солитонов положительной полярности; этот процесс иллюстрируется рис. 3 для $\tau = 30$.

В работах [4, 5] положительная часть волнового поля (пьедестал) рассматривалась как главный источник генерации вторичных солитонов. Для понимания механизмов генерации вторичных солитонов в численных экспериментах волновое поле в критической точке было разделено на две части. В первом эксперименте использовалась только отрицательная часть волнового поля, соответствующая основной волне в критической точке, и далее решалось уравнение Кортевега – де Бриза с соответствующим начальным условием (рис.4). В другом эксперименте начальным условием является только пьедестал в критической точке (рис. 5). Как видим, и в том и другом случае образуется вторичный солитон примерно одинаковой амплитуды, и временная эволюция амплитуды положительного импульса, превращающегося в солитон, представлена на рис. 6 для всех трех вариантов.

Таким образом, на формирование вторичного солитона, генерирующегося после прохождения критической точки, одинаковым образом влияет как формирование пьедестала за солитоном на адиабатической стадии, так и трансформация лидирующей (отрицательной) волны в зоне переменной нелинейности после прохождения критической точки.

Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (96-05-64108, 96-05-64111), а также в рамках соглашения о сотрудничестве между Институтом прикладной физики РАН и Университетом Монаша (Австралия).

-
1. Е.Н.Пелиновский, С.Х.Шаврацкий, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана **12**, 86 (1976).
 2. V.Djordjevic and L.Redekopp, J. Phys. Oceanogr. **8**, 1016 (1978).
 3. E.N.Pelinovsky and S.Kh.Shavratsky, Physica D **3**, 410 (1981).
 4. C.J.Knickerbocker and A.C.Newell, Phys.Letters **75A**, 326 (1980).
 5. K.Helfrich, W.Melville, and J.Miles, J. Fluid Mech. **149**, 385 (1984).
 6. B.Malomed and V.Shrira, Physica D **53**, 1 (1991).
 7. P.Holloway, E.Pelinovsky, T.Talipova et al., J. Phys. Oceanogr., 1997 (в печати)
 8. Y.Kodama and M.Ablowitz, Stud. Appl. Maths. **64**, 225 (1981).
 9. R.Grimshaw and H.Mitsudera, Stud. Appl. Math. **90**, 75 (1993).