Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.3, стр.248 - 252 © 1997г. 10 февраля

ЭНЕРГИЯ И ЧИСЛО ЧАСТИЦ В СКИРМИОННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ ПРИ НЕЧЕТНОМ ЗАПОЛНЕНИИ УРОВНЕЙ ЛАНДАУ ДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

С.В.Иорданский, С.Г.Плясунов

Институт теоретической физики РАН им.Ландау

117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 декабря 1996 г.

После переработки 5 января 1997 г.

Показано, что приближения волновых функций, спроектированных на один уровень Ландау, недостаточно для описания возбуждений типа скирмионов. Использование неспроектированных функций приводит к наглядной физической картине и существенно упрощает выкладки. Выражение для энергии скирмионных возбуждений существенно отличается от полученных в приближении глобально спроектированных функций на ряд членов, имеющих весьма простой смысл.

PACS: 12.39.Dc, 73.40.Hm

Вопрос о существовании возбуждений типа скирмионов для нечетно заполненных уровней Ландау двумерных электронов возник сравнительно давно [1, 2], однако конкретное вычисление их энергии проведено недавно. В работе [3] использовался феноменологический подход теории Черна-Саймонса, было показано, что в этом случае скирмионы должны существовать, и вычислена их энергия. Затем, в работе [4] было проведено численное определение энергии скирмионов на основе спроектированных на низший уровень Ландау функций методом Хартри-Фока. В работе [5] использовался метод градиентного разложения и были вычислены число частиц и энергия в низшем приближении по градиентам. Результаты работы [5] были уточнены в статье [6], где также была развита техника вычислений в любом порядке градиентного разложения. Следует заметить, что техника градиентного разложения весьма громоздка и окончательные результаты возникают только после утомительных вычислений даже в низшем порядке. Использование приближения спроектированных функций обычно оправдывается большой величиной циклотронной энергии $\hbar\omega_c$ по сравнению с кулоновской энергией, которая имеет порядок $e^2/\kappa l_H$, где $l_H{}^2 = c\hbar/eH$, κ – диэлектрическая проницаемость.

В настоящей работе мы покажем, что это утверждение неправильно, и учет других уровней Ландау приводит к добавкам в энергии как нулевого порядка по $1/\hbar\omega_c$, так и к членам порядка $\hbar\omega_c$ в энергии скирмионов. В то же время выкладки существенно упрощаются и имеют простую физическую интерпретацию.

Скирмионы соответствуют неоднородному вращению спиноров-операторов вторичного квантования с помощью матрицы поворота $U(\mathbf{r})$, что соответствует преобразованию $\Psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})$, где $\chi(\mathbf{r})$ – новые спиноры. Матрица $U(\mathbf{r})$ параметризуется тремя эйлеровыми углами:

$$U(\mathbf{r}) = U(\gamma(\mathbf{r}))U(\beta(\mathbf{r}))U(\alpha(\mathbf{r})),$$

$$U(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sigma_z \sin\frac{\alpha}{2};\ U(\beta) = \cos\frac{\beta}{2} + i\sigma_y \sin\frac{\beta}{2};\ U(\gamma) = \cos\frac{\gamma}{2} + i\sigma_z \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Для того чтобы энергия была конечной при конечной величине g-фактора, необходимо, чтобы угол β, соответствующий отклонению направления спина от оси z, по которой направлен спин при $r \to \infty$, стремился к нулю на больших расстояниях. Предполагается, что матрица $U(\mathbf{r})$ нигде не имеет особенностей, что соответствует отсутствию особенностей у матрицы:

$$\mathbf{A}_\mu = -i U^\dagger \partial_\mu U = \Omega^i_\mu \sigma_i ,$$

где σ_i – матрицы Паули, $i = x, y, z$; $\mu = x, y$. Выражения для Ω^x, Ω^y и Ω^z легко получить непосредственным дифференцированием:

$$\Omega^z_\mu = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \alpha + \cos\beta\, \partial_\mu \gamma\right) ,$$

$$\Omega^x_\mu = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \gamma \sin\beta \cos\alpha - \partial_\mu \beta \sin\alpha\right) ,$$

$$\Omega^y_\mu = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \beta \cos\alpha + \partial_\mu \gamma \sin\beta \sin\alpha\right) .$$

Нетривиальная топология матрицы U связана со свойствами отображений $\gamma(\mathbf{r})$ и $\alpha(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ пробегает окружность большого радиуса. При этом степень отображения двумерной плоскости на сферу, параметризуемую углами γ и β, совпадает со степенью отображения окружности на окружность, то есть вихревой особенностью $\gamma(\mathbf{r})$. Для того чтобы Ω_i были несингулярны, особенность $\gamma(\mathbf{r})$ должна совпадать с соответствующей особенностью $\alpha(\mathbf{r})$, находящейся в точке, где $\cos\beta = -1$. Таким образом, матрица поворота $U(\mathbf{r})$ должна задаваться всеми тремя углами Эйлера, а соответствующий спинор Ψ имеет целое квантование циркуляции на больших расстояниях.

Поэтому правильнее было бы говорить о несингулярных вихрях, кор которых задается скирмионом (по аналогии с ^{3}He-A [7]). При этом вихревые числа могут быть любыми целыми числами в отличие от ^{3}He-A, где они четные. Гамильтониан электронной системы в магнитном поле

$$H = \int \frac{1}{2m} \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \left(-i \frac{\partial}{\partial r_\mu} - A_\mu\right)^2 \Psi(\mathbf{r}, t)\, d^2 r +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint V(r - r') \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \Psi^\dagger(\mathbf{r}', t) \Psi(\mathbf{r}', t) \Psi(\mathbf{r}, t) d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}', \qquad (1)$$

где $V(\mathbf{r})$ – кулоновский потенциал. После замены $\Psi = U(\mathbf{r})\chi$ гамильтониан принимает вид (без каких-либо приближений)

$$H = \int \frac{1}{2m} \chi^\dagger(\mathbf{r}, t) \left(-i \frac{\partial}{\partial r_\mu} - A_\mu - i U^\dagger \partial_\mu U\right)^2 \chi(\mathbf{r}, t)\, d^2 r +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint V(r - r') \chi^\dagger(\mathbf{r}, t) \chi^\dagger(\mathbf{r}', t) \chi(\mathbf{r}', t) \chi(\mathbf{r}, t) d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}', \qquad (2)$$

то есть для новых спиноров в кинетической энергии появляется зависящий от спина вектор-потенциал. В этот гамильтониан в целях упрощения не включена зеемановская энергия; это будет учтено позже.

Легко показать, что представление спинора χ в виде спроектированного на один уровень Ландау недостаточно, так как в (2) после разложения по

степеням $U^\dagger \partial_\mu U$ есть слагаемые, которые перебрасывают на более высокие и более низкие уровни Ландау, и приводят к поправкам того же порядка и ниже, что и учтенные в работах [4, 5].

Мы будем считать, что матрица U слабо меняется на расстояниях порядка l_H, что связано с малостью g-фактора, определяющего размер области, где спины занимают невыгодную ориентацию с точки зрения зеемановской энергии. Как обычно, существенен только вектор $\mathrm{rot}\vec{\Omega}^i$ в силу градиентной инвариантности. Основное предположение дальнейших заключений состоит в том, что локально мы имеем заполнение уровня Ландау с определенной проекцией спина в локальном магнитном поле так же, как это имеет место в случае однородной во всем пространстве матрицы U. Это предположение позволяет использовать хартри-фоковское выражение для плотности энергии заполненного уровня с точностью до членов $V_{int}/\hbar\omega_c$. При этом локально энергия диагонализуется компонентами спинора $\chi_\uparrow, \chi_\downarrow$, что позволяет оставить в дополнительном вектор-потенциале только диагональную часть $\mathbf{A}' \approx \vec{\Omega}_z \sigma_z$. Эффективное магнитное поле для спинов вверх

$$\mathbf{H}^+_{eff} = \mathbf{H}_0 - \mathrm{rot}\vec{\Omega}_z. \tag{3}$$

Магнитное поле для спинов вниз

$$\mathbf{H}^-_{eff} = \mathbf{H}_0 + \mathrm{rot}\vec{\Omega}_z. \tag{4}$$

Все локальные уровни Ландау заполнены в поле $\mathbf{H}^+_{eff}$ (3), и спины электронов ориентированы по локальному среднему спину. Плотность электронов, заполняющих локальный уровень Ландау,

$$\rho = \frac{1}{2\pi l^2_{H_{eff}}} = \frac{1}{2\pi}\frac{eH^+_{eff}}{c\hbar} = \frac{1}{2\pi}\frac{e}{c\hbar}\left(H_0 - \mathrm{rot}\Omega_z\right) \tag{5}$$

Можно выбрать систему единиц так, что $eH_0/\hbar c = 1$, $H_0 = 1$. Тогда получим

$$\rho = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rot}\Omega_z. \tag{6}$$

Этот же результат получается в приближении глобального проектирования на один уровень Ландау [4, 5]. Таким образом, отличный от нуля средний магнитный поток дополнительного магнитного поля приводит к изменению полного числа электронов на нижнем уровне Ландау. Величина $Q = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{rot}\Omega_z d^2\mathbf{r}$ является топологическим инвариантом (степенью отображения плоскости на сферу $S^2 \to S^2$), принимающим целые значения. В случае, когда задано число частиц, низший уровень Ландау не может вместить всех частиц, так как $\frac{1}{2\pi}\int (1 - \mathrm{rot}\Omega_z)\, d^2\mathbf{r} = N_0 - Q$ и Q частиц должно перейти в состояния второго спинового подуровня (считаем, что спиновое расщепление много меньше $\hbar\omega_c$ и $Q > 0$). Если же задан химический потенциал μ, то просто число частиц должно уменьшиться на Q, так как состояния на втором спиновом подуровне выше химического потенциала. Аналогично, случай $Q < 0$ приводит к появлению дырки в локальном заполнении нижнего спинового подуровня.

В дальнейшем мы будем считать, что реализуется случай заданного химического потенциала и заполнен нулевой уровень Ландау (УЛ). Хартри-фоковская

энергия является интегралом от локальной плотности хартри-фоковской энергии, вычисленной для полностью заполненного УЛ в локальном эффективном магнитном поле. Эта энергия при фиксированном взаимодействии зависит только от магнитного поля, однозначно, согласно (4), связанного с плотностью ρ, и имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\omega_c}{2}\rho + \frac{\tilde{E}(\rho)}{2}\rho^2 - \frac{E(\rho)}{2}\mathbf{S}^2\rho^2 + \frac{E_1(\rho)}{2}\rho^2\left(\vec{\nabla}\mathbf{S}\right)^2 + g\mathbf{H}\mathbf{S}\rho + E_c(\rho)\,. \qquad (7)$$

Выражения для коэффициентов E , $\tilde{E}$ и E_1 имеют порядок $e^2/\kappa l_H$ и приведены в [6], $\mathbf{S}$ – среднее значение спина. Ограничимся двумя первыми членами разложения по $\mathrm{rot}\vec{\Omega}_z$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{2\pi}\frac{\hbar\omega_c}{2} + \frac{\tilde{E}(\rho_0)}{2(2\pi)^2} - \frac{E(\rho_0)}{2(2\pi)^2}\mathbf{S}^2 + \frac{\hbar\omega_c}{2\pi}\mathrm{rot}\vec{\Omega}_z +$$

$$+\frac{\left(\tilde{E}(\rho_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{E}}{\partial\rho_0}\rho_0\right)}{(2\pi)^2}\mathrm{rot}\vec{\Omega}_z - \frac{\left(E(\rho_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\rho_0}\rho_0\right)}{(2\pi)^2}\mathbf{S}^2\,\mathrm{rot}\vec{\Omega}_z +$$

$$+\frac{1}{2\pi}g\mathbf{H}\mathbf{S} + \frac{E_1(\rho_0)}{2(2\pi)^2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{S}\right)^2 + E_c(\rho); \qquad (8)$$

здесь $\rho_0 = 1/2\pi$ – плотность электронов на полностью заполненном УЛ во внешнем магнитном поле; в зеемановском члене мы не учитывали изменение плотности. Изменение полной свободной энергии электронов на нижнем спиновом подуровне при появлении несингулярного вихря-скирмиона с вихревым числом Q выражается формулой

$$\Omega = \int d^2\mathbf{r}\,(\mathcal{H}(\mathbf{r}) - \mu\rho(\mathbf{r})) = \frac{\hbar\omega_c^0}{2}Q + \left(\frac{\tilde{E}'(\rho_0)}{2\pi} - \frac{E'(\rho_0)}{2\pi}\right)Q +$$

$$+g\int\frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi}\mathbf{H}\mathbf{S}(\mathbf{r}) + \frac{E_1(0)}{4\pi}\int\left(\vec{\nabla}\mathbf{S}\right)^2 d^2\mathbf{r} + \int E_c d^2\mathbf{r}\,, \qquad (9)$$

где

$$E'(\rho_0) = E(\rho_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\rho_0}\rho_0, \quad \tilde{E}'(\rho_0) = \tilde{E}(\rho_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{E}}{\partial\rho_0}\rho_0.$$

Мы видим, что в полной энергии появляются дополнительные члены, пропорциональные Q, которые отсутствуют в выражениях, полученных ранее в работах [5, 6]. Мы считали, что химический потенциал соответствует половине щели спинового расщепления. Энергии одночастичных возбуждений соответствуют вариационным производным H по плотностям $n_\uparrow(\mathbf{r})$ и $n_\downarrow(\mathbf{r})$ и имеют вид

$$\epsilon^+ = -\frac{E(0)}{2\pi} + \hbar\omega_c\mathrm{rot}\Omega_z + \left(\frac{\tilde{E}'}{2\pi} - \frac{E'}{2\pi}\right)\mathrm{rot}\Omega_z + g\mathbf{H}\mathbf{S} + \frac{E(0)}{2\pi}(\triangle\mathbf{S})\left(U^\dagger\vec{\sigma}U\right)\,, \qquad (10)$$

$$\epsilon^- = \frac{E(0)}{2\pi} - \hbar\omega_c\mathrm{rot}\Omega_z - \left(\frac{\tilde{E}'}{2\pi} - \frac{E'}{2\pi}\right)\mathrm{rot}\Omega_z - g\mathbf{H}\mathbf{S} - \frac{E(0)}{2\pi}(\triangle\mathbf{S})\left(U^\dagger\vec{\sigma}U\right) \qquad (10')$$

(из значений энергии вычтен химический потенциал).

Мы видим, что скирмион имеет многие атрибуты композитного фермиона: целый заряд и целое число квантов магнитного потока. В нашем приближении на один заряд приходится один квант потока. Это обстоятельство может быть связано с тем, что мы использовали приближение малых градиентов и изменение магнитного поля $H^+ - H_0$ считалось малым, так что следующие уровни Ландау в поле H^+ находятся на расстоянии $\hbar\omega_c$. Реальная величина дополнительного поля зависит от области его локализации, так как поток есть топологическая характеристика. При малых размерах области локализации дополнительное поле возрастает и величина H^+ уменьшается. К тому же, дополнительное поле растет с величиной Q. Сама величина g-фактора также не слишком мала, поэтому собственное значение ϵ^+ при отрицательных Q может стать ниже уровня химического потенциала не только для первого, но и для второго УЛ. Если бы это имело место для вихря с $Q = -2$, то поток был бы равен двум квантам на единицу заряда, как это имеет место у композитных фермионов. Разумеется, выяснение этого обстоятельства требует выхода за рамки нашего рассмотрения, так как в этом случае "локальное" приближение несправедливо, и нужно привлекать численные методы.

Авторы выражают благодарность Г.Е.Воловику за многочисленные обсуждения ряда затронутых вопросов. Авторы также благодарят Ю.А.Бычкова за ознакомление с его работой до опубликования. Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований 95-02-05883 и грантом CRDF 452.

---

1. D.H.Lee and C.L.Kane, Phys. Rev. Lett. **64**, 1313 (1990).
2. Yu.A.Bychkov, Pis'ma ZhETF **55**, 177 (1992).
3. S.L.Sondhi, A.Kalrede, S.A. Kivelson, and E.H. Rezai, Phys. Rev. **B47**, 16418 (1993).
4. H.A.Fertig, L.Brey, R.Cote, and A.H. MacDonald, Phys. Rev. **B50**, 11018 (1994).
5. K.Moon, H.Mori, Kun Yang et al., Phys. Rev. **B51**, 5138 (1995).
6. Yu.A.Bychkov, T.Maniv, and I.Vagner, Phys. Rev. **B53**, 10148 (1996).
7. M.M.Salomaa and G.E. Volovik, Rev. Mod. Phys. **59**, 533 (1987).